

IODISSEE : Méthodes numériques

Christophe Besse, Pierre Degond, Chang Yang, Fabrice Deluzet,
Pauline Laffite, Alexei Lozinski, Claudia Negulescu

11–12 Janvier 2010

Fabrice Deluzet

Cursus universitaire

- 👉 Ingénieur en mathématiques appliquées et modélisation
- 👉 Thèse : Modélisation mathématique et simulation numérique de commutateurs d'ouverture à plasma

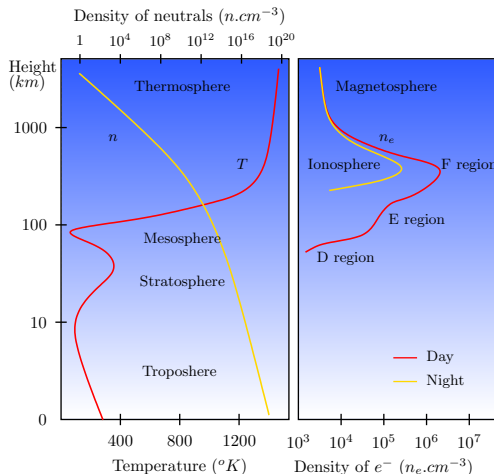
Cursus professionnel

- 👉 Ingénieur de Recherche CNRS en poste depuis 1999 à l'IMT.
Spécialité : Calcul scientifique.
- 👉 Plasmas ionosphériques.
- 👉 Développement de schémas préservant l'asymptotique dans différentes limites
 - limites quasi-neutes pour des modèles fluides et cinétiques,
 - méthodes pour les milieux fortement anisotropes.
- 👉 Méthodes multi-échelles (propagation de polluants en milieux urbains, réseaux électriques).

Plan de l'exposé

- 1 Contexte physique, motivations
 - Le contexte physique
 - Motivations de l'étude
- 2 Modélisation
- 3 Études du modèle Striations
- 4 Le modèle Dynamo-3D
- 5 Perspectives

L'environnement terrestre



- ☞ L'atmosphère est stratifiée et ionisée,
- ☞ L'ionosphère est caractérisée
 - par des altitudes de 90 à 1500 kilomètres,
 - une densité de neutres très supérieure à celle du plasma,
 - un pic de densité de plasma à ~ 300 km d'environ 10^6 cm⁻³.

Fig. 1: Stratification de l'atmosphère.

Propriétés de l'ionosphère

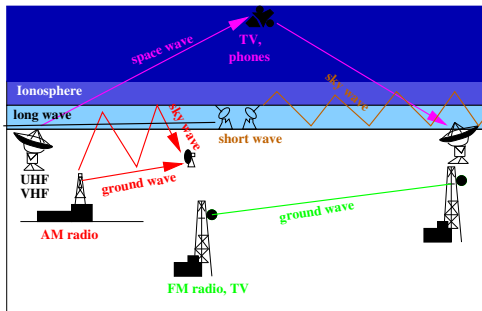


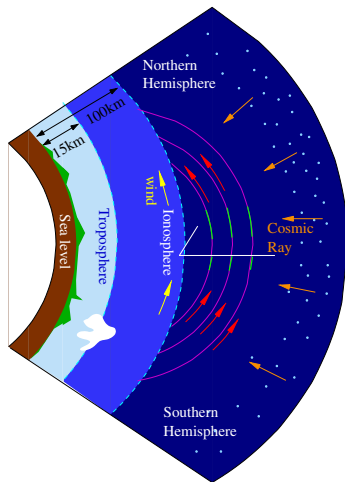
Fig. 2: Transmission des ondes radios et interactions avec l'ionosphère.

L'ionosphère :

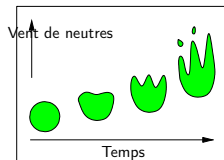
- ☞ réfléchit les ondes basses fréquences
- ☞ transmet les ondes hautes fréquences,
- ☞ est soumise à des nombreuses instabilités (éruptions solaires, striations, ...).

Striations : instabilités du plasma ionosphérique se produisant le long des lignes du champ magnétique terrestre.

Formations des striations



Évolution d'une bulle de plasma à une altitude de 300 km.



La bulle de plasma est étirée le long des lignes de champ magnétique. Dans un plan orthogonal au champ magnétique le plasma est soumis à une instabilité en $E \times B$.



Fig. 3: Formation des striations.

Plan de l'exposé

- 1 Contexte physique, motivations
- 2 Modélisation
 - L'effet dynamo
 - Le système Euler-Maxwell
 - Une hiérarchie de modèle
 - La hiérarchie Dynamo
- 3 Études du modèle Striations
- 4 Le modèle Dynamo-3D
- 5 Perspectives

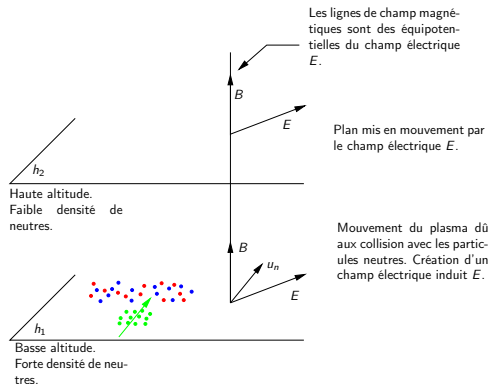


Fig. 4: L'effet dynamo.

Le modèle :

- équations de Maxwell,
- équations d'Euler et collisions avec les neutres.

Hypothèses simplificatrices :

- une seule espèce d'ions O^+ ,
- pas de réactions chimiques,
- collisions ions-électrons et effets de la gravité négligés.

Notations

n_e, n_i	densités électronique et ionique
u_e, u_i	vitesse électronique et ionique
u_n	vitesse des neutres
P_e, P_i	pressions ionique et électronique
ν_e, ν_i	fréquences de collision électrons-neutres ions-neutres
m_e, m_i	masses des électrons et des ions
$j = e(n_i u_i - n_e u_e)$	densité de courant
$\rho_c = e(n_i - n_e)$	densité de charge

Le système d'Euler-Maxwell

Équations d'Euler

$$\mathcal{L}_{u_e}(n_e) = 0,$$

$$m_e \mathcal{L}_{u_e}(n_e u_{ek}) = -\partial_{x_k} P_e - \overbrace{en_e(E_k + (u_e \times B)_k)}^{\text{Lorentz}} + n_e F_{ek},$$

$$\mathcal{L}_{u_i}(n_i) = 0,$$

$$m_i \mathcal{L}_{u_i}(n_i u_{ik}) = -\partial_{x_k} P_i + qn_i(E_k + (u_i \times B)_k) + n_i F_{ik},$$

Maxwell

$$\frac{1}{c^2} \partial_t E - \nabla \times B = -\mu_0 j,$$

$$\partial_t B + \nabla \times E = 0,$$

$$\nabla \cdot E = \rho_c / \varepsilon_0,$$

$$\nabla \cdot B = 0,$$

$$\rho_c = q(n_i - n_e), \quad j = q(n_i u_i - n_e u_e).$$

Avec l'opérateur de transport :

$$\mathcal{L}_u(\rho) = \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u),$$

et les forces de friction :

$$F_e = -\nu_e m_e (u_e - u_n),$$

$$F_i = -\nu_i m_i (u_i - u_n).$$

Ordres de grandeurs caractéristiques

Paramètre Physique	Ordre de grandeur	Paramètre adimensionné	Valeur typique
Temps	\bar{t}	$t' = t/\bar{t}$	10^3 s
Longueur	\bar{x}	$x' = x/\bar{x}$	10^5 m
Vitesse	$\bar{u} = \bar{x}/\bar{t}$	$u'_{e,i,n} = u_{e,i,n}/\bar{u}$	10^2 ms^{-1}
Densité	\bar{n}	$n'_{e,i} = n_{e,i}/\bar{n}$	$10^{12} \mid 10^{15} \text{ m}^{-3}$
Champ magnétique	\bar{B}	$B' = B/\bar{B}$	10^{-5} T
Champ électrique	$\bar{E} = \bar{u}\bar{B}$	$E' = E/\bar{E}$	10^{-3} Vm^{-1}
Fréq. de collisions e-n	$\bar{\nu}_e$	$\nu'_e = \nu_e/\bar{\nu}_e$	10^2 s^{-1}
Fréq. de collisions i-n	$\bar{\nu}_i = \frac{m_e}{m_i} \bar{\nu}_e$	$\nu'_i = \nu_i/\bar{\nu}_i$	10^{-2} s^{-1}

Écriture des équations en variables adimensionnées

Paramètres d'adimensionnement

L'adimensionnement introduit des paramètres sans dimension :

- β intensité relativement au champ magnétique ambiant du champ magnétique induit,
- κ nombre de collisions e-n i-n pendant une période cyclotron,
- ε rapport des masses électronique et ionique,
- α rapport de la vitesse caractéristique à la vitesse de la lumière,
- τ rapport du temps moyen entre deux collisions ions-neutres et du temps caractéristique,
- η mesure de l'énergie thermique.

Le système Euler-Maxwell adimensionné

Équations d'Euler

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot (n_e u_e) = 0,$$

$$\tau \varepsilon (\mathcal{L}_{u_e}(n_e u_{ek})) = -\eta \partial_{x_k} P_e - \kappa^{-1} \overbrace{n_e (E_k + (u_e \times B)_k)}^{\text{Lorentz}} - \overbrace{\nu_e n_e (u_{ek} - u_{nk})}^{\text{friction}},$$

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i u_i) = 0,$$

$$\tau (\mathcal{L}_{u_i}(n_i u_{ik})) = -\eta \partial_{x_k} P_i + \kappa^{-1} n_i (E_k + (u_i \times B)_k) - \nu_i n_i (u_{ik} - u_{nk}),$$

Maxwell

$$\alpha \partial_t E - \nabla \times B = -\beta j,$$

$$\partial_t B + \nabla \times E = 0,$$

$$\frac{\kappa \alpha}{\beta} \nabla \cdot E = \rho_c,$$

$$\nabla \cdot B = 0,$$

$$\rho_c = n_i - n_e, \quad \kappa j = n_i u_i - n_e u_e.$$

Valeurs caractéristiques des paramètres pour $n_{i,e} = 10^{12} | 10^{15} m^{-3}$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 10^{-4}, & \tau &= 10^{-1}, \\ \eta &= 10^1, & \kappa &= 10^{-4}, \\ \alpha &= 10^{-12}, & \beta &= 10^{-5} | 10^{-2}. \end{aligned}$$

Le système Euler-Maxwell adimensionné

Équations d'Euler

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot (n_e u_e) = 0,$$

$$\tau \mathcal{E}(\mathcal{L}_{u_e}(n_e u_{ek})) = -\eta \partial_{x_k} P_e - \kappa^{-1} n_e (E_k + (u_e \times B)_k) - \nu_e n_e (u_{ek} - u_{nk}),$$

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i u_i) = 0,$$

$$\tau (\mathcal{L}_{u_i}(n_i u_{ik})) = -\eta \partial_{x_k} P_i + \kappa^{-1} n_i (E_k + (u_i \times B)_k) - \nu_i n_i (u_{ik} - u_{nk}),$$

Maxwell

$$\alpha \partial_t E - \nabla \times B = -\beta j,$$

$$\partial_t B + \nabla \times E = 0,$$

$$\frac{\kappa \alpha}{\beta} \nabla \cdot E = \rho_c,$$

$$\nabla \cdot B = 0,$$

$$\rho_c = n_i - n_e, \quad \kappa j = n_i u_i - n_e u_e.$$

Valeurs caractéristiques des paramètres pour $n_{i,e} = 10^{12} | 10^{15} m^{-3}$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 10^{-4}, & \tau &= 10^{-1}, \\ \eta &= 10^1, & \kappa &= 10^{-4}, \\ \alpha &= 10^{-12}, & \beta &= 10^{-5} | 10^{-2}. \end{aligned}$$

Le système Euler-Maxwell adimensionné

Équations d'Euler

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot (n_e u_e) = 0,$$

$$0 = -\eta \partial_{x_k} P_e - \kappa^{-1} n_e (E_k + (u_e \times B)_k) - \nu_e n_e (u_{ek} - u_{nk}),$$

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i u_i) = 0,$$

$$\tau (\mathcal{L}_{u_i} (n_i u_{ik})) = -\eta \partial_{x_k} P_i + \kappa^{-1} n_i (E_k + (u_i \times B)_k) - \nu_i n_i (u_{ik} - u_{nk}),$$

Maxwell

$$\alpha \partial_t E - \nabla \times B = -\beta j,$$

$$\partial_t B + \nabla \times E = 0,$$

$$\frac{\kappa \alpha}{\beta} \nabla \cdot E = \rho_c,$$

$$\nabla \cdot B = 0,$$

$$\rho_c = n_i - n_e, \quad \kappa j = n_i u_i - n_e u_e.$$

Valeurs caractéristiques des paramètres pour $n_{i,e} = 10^{12} | 10^{15} m^{-3}$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 10^{-4}, & \tau &= 10^{-1}, \\ \eta &= 10^1, & \kappa &= 10^{-4}, \\ \alpha &= 10^{-12}, & \beta &= 10^{-5} | 10^{-2}. \end{aligned}$$

Le système Euler-Maxwell adimensionné

Équations d'Euler

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot (n_e u_e) = 0,$$

$$0 = -\eta \partial_{x_k} P_e - \kappa^{-1} n_e (E_k + (u_e \times B)_k) - \nu_e n_e (u_{ek} - u_{nk}),$$

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i u_i) = 0,$$

$$\tau (\mathcal{L}_{u_i} (n_i u_{ik})) = -\eta \partial_{x_k} P_i + \kappa^{-1} n_i (E_k + (u_i \times B)_k) - \nu_i n_i (u_{ik} - u_{nk}),$$

Maxwell

$$-\nabla \times B = -\beta j,$$

$$\partial_t B + \nabla \times E = 0,$$

$$0 = \rho_c, \Rightarrow \text{quasineutralité}$$

$$\nabla \cdot B = 0,$$

$$\rho_c = n_i - n_e, \quad \kappa j = n_i u_i - n_e u_e.$$

Valeurs caractéristiques des paramètres pour $n_{i,e} = 10^{12} | 10^{15} m^{-3}$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 10^{-4}, & \tau &= 10^{-1}, \\ \eta &= 10^1, & \kappa &= 10^{-4}, \\ \alpha &= 10^{-12}, & \beta &= 10^{-5} | 10^{-2}. \end{aligned}$$

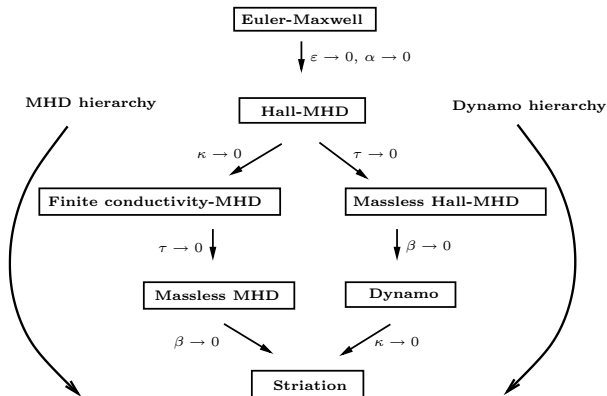


Fig. 5: Hiérarchie des modèles

- 👉 Hiérarchie Dynamo : densité de plasma standard,
- 👉 Hiérarchie MHD : densité importante de plasma.

Le modèle Dynamo-3D

- plasma quasi-neutre : $n = n_e = n_i$,
- B est réduit au champ magnétique terrestre,
- sur l'échelle de temps caractéristique, $\partial B / \partial t = 0$,

$$\begin{aligned} \partial_t n + \nabla \cdot (n u_i) &= 0, \\ u_e &= \mathbb{M}_e (-E + \kappa \nu_e u_n), \\ u_i &= \mathbb{M}_i (E + \kappa \nu_i u_n), \\ E &= -\nabla \phi, \\ \nabla \cdot j &= 0, \\ \kappa j &= n(u_i - u_e), \end{aligned}$$

$$\mathbb{M}_e = \begin{pmatrix} \mu_e^P & -\mu_e^H & 0 \\ \mu_e^H & \mu_e^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu_e^{\parallel} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{M}_i = \begin{pmatrix} \mu_i^P & \mu_i^H & 0 \\ -\mu_i^H & \mu_i^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i^{\parallel} \end{pmatrix},$$

avec

$$\mu_{e,i}^P = \frac{\kappa \nu_{e,i}}{(\kappa \nu_{e,i})^2 + |B|^2}, \quad \mu_{e,i}^H = \frac{|B|}{(\kappa \nu_{e,i})^2 + |B|^2}, \quad \mu_{e,i}^{\parallel} = \frac{1}{\kappa \nu_{e,i}}.$$

Construction du modèle Striations

Hypothèses :

- 👉 le champ magnétique est constant et orienté suivant z ,
- 👉 conductivité alignée infinie : $\kappa \rightarrow 0$,
- 👉 la composante du courant alignée s'annule sur les bords du domaine en z (reconnection avec l'atmosphère neutre).

Propriétés :

- le potentiel électrique ne dépend que des coordonnées perpendiculaire (x_{\perp}),
- équation elliptique intégrée sur les lignes de champ : problème bidimensionnel.

Le modèle Striations multicouche (variables adimensionnées)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) = 0$$

$$u = \frac{E \times B}{|B|^2} + \left(\left(u_n - \eta \frac{\nabla p}{n} \right) \cdot \frac{B}{|B|} \right) \frac{B}{|B|}; \quad E = -\nabla_{\perp} \phi(x_{\perp})$$

$$\nabla_{\perp} \cdot J_{\perp} = 0,$$

$$J_{\perp} = \frac{1}{|B|^2} (-\sigma(x_{\perp}) \nabla_{\perp} \phi + U_n \times B - \eta \nabla_{\perp} P_{\perp} \times B),$$

$$\sigma(x_{\perp}) = \int n \nu dz, \quad U_n = \int n \nu u_n dz, \quad P_{\perp} = \int P(n) dz.$$

- $\sigma/|B|^2$: conductivité de Pedersen intégrée sur une ligne de champ,
- équation de transport 3D, équation elliptique 2D.

Le modèle Striations monocouche (variables adimensionnées)

Hypothèses :

- ☞ toutes les quantités ne dépendent que de x_\perp ,
- ☞ $u_{nz} = 0$ et $\nabla P = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) &= 0 \\ -\nabla \cdot \left(\frac{n}{|B|^2} \nabla \phi \right) &= -\nabla \cdot \left(n \frac{u_n \times B}{|B|^2} \right), \\ u &= -\frac{E \times B}{|B|^2}, \\ E &= -\nabla \phi.\end{aligned}$$

Plan de l'exposé

- 1 Contexte physique, motivations
- 2 Modélisation
- 3 Études du modèle Striations
 - Le modèle Striations en champ magnétique non uniforme
 - Les limites du modèle Striations
- 4 Le modèle Dynamo-3D
- 5 Perspectives

Introduction d'un système de coordonnées curvilignes

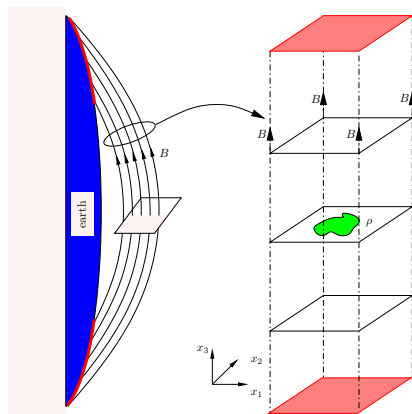


Fig. 6: Tube de champ magnétique en géométrie cartésienne.

Extension à un champ magnétique dipolaire :

☞ champ axisymétrique :
 $B = (B_r(r, z), 0, B_z(r, z))$,
 (r, θ, z) étant les
 coordonnées cylindriques ;

☞ introduction des potentiels
 d'Euler :
 $\nabla \cdot B = \nabla \times B = 0 \Rightarrow \exists$
 $\beta(r, z), \gamma(r, z)$ tels que

$$B = -\nabla\gamma = (\nabla^\perp\beta),$$

☞ les lignes de champ
 magnétique correspondent à
 $(\alpha, \beta) = \text{constant}$.

Introduction d'un système de coordonnées curvilignes

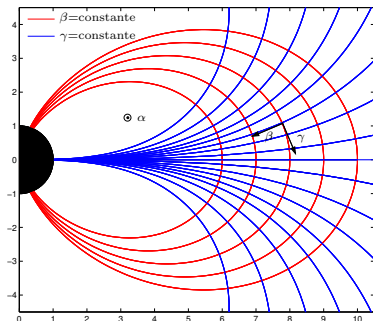


Fig. 7: Coordonnées curvilignes associées aux champ magnétique dipolaire.

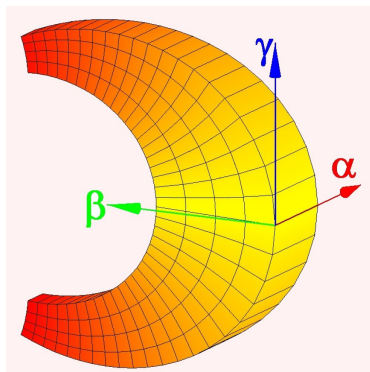


Fig. 8: Tube de champ magnétique en géométrie curviligne.

Le modèle Striation en coordonnées curvilignes (variables physiques)

Le modèle Striations (sans transport aligné ni gradient de pression)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v_{i\alpha}}{r} n \right) + |B|^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{r v_{i\beta}}{|B|} n \right) = 0,$$

$$v_{i\alpha} = r \frac{\partial \phi}{\partial \beta}, \quad v_{i\beta} = -\frac{1}{r|B|} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(A_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(A_\beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial J_{n\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial J_{n\beta}}{\partial \beta},$$

$$A_\alpha = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} n \kappa \frac{d\gamma}{r^2 |B|^4}, \quad A_\beta = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} n \kappa \frac{r^2 d\gamma}{|B|^2},$$

$$J_{n\alpha} = - \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} n \kappa u_{n\beta} \frac{d\gamma}{r |B|^3}, \quad J_{n\beta} = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} n \kappa u_{n\alpha} \frac{r d\gamma}{|B|^2},$$

$$\kappa = \frac{m_i}{e} \nu_i + \frac{m_e}{e} \nu_e.$$

Environnement physique et domaine de calcul

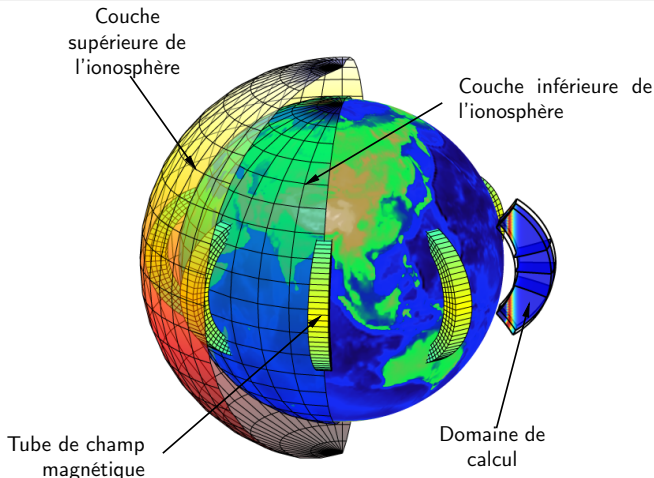


Fig. 9: Domaine de calcul dans son contexte physique.

Le modèle Striations multi-couches

Domaine de simulation : tube de champ magnétique.

- ☞ Domaine discrétisé en plusieurs couches,
- ☞ maillage cartésien uniforme sur chaque couche.

Condition initiale :

- ☞ modèle d'ionosphère terrestre : IRI (International Reference Ionosphere),
- ☞ modèle d'atmosphère neutre : MSISE-1990 (Extended version of the Mass Spectrometer Incoherent Scatter Model).

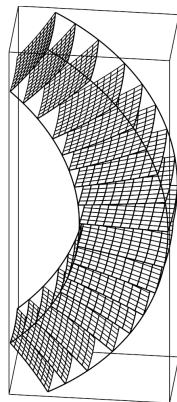
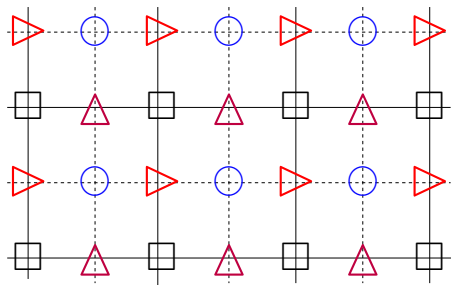


Fig. 10: Tube de champ discrétisé.

Discrétisation en espace d'une couche



Inconnue	Localisation
n, B	□
ϕ	○
$v_\alpha = \partial\phi/\partial\beta$	▷
$v_\beta = -\partial\phi/\partial\alpha$	△

Fig. 11: Localisation des inconnues sur maillages décalés.

Discrétisation du modèle Striation

Équation de transport

- ➡ Méthode de volumes finis avec limiteur de pente (UltraBee).
- ➡ Splitting directionnel.

Calcul du champ électrique

- ➡ Schéma volumes finis pour l'équation elliptique du potentiel.
- ➡ Différences finis pour les calcul du champ électrique et de la vitesse.

Condition initiale

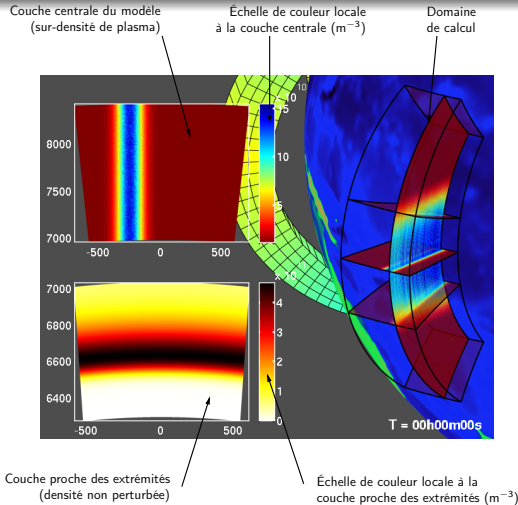


Fig. 12: Densité initiale du plasma dans le tube de champ et sur deux couches du modèle.

État du plasma après quelques heures d'évolution

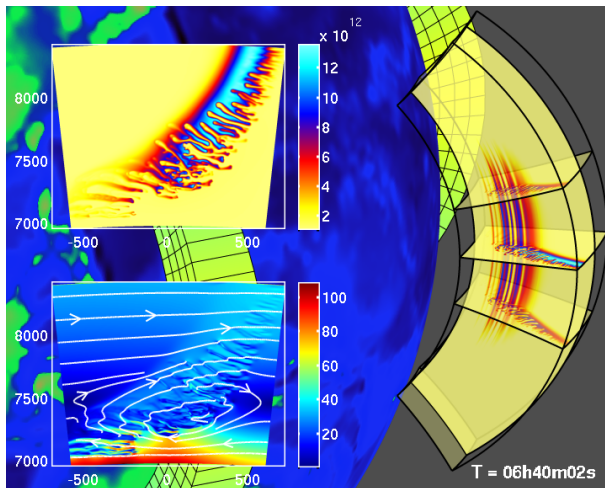


Fig. 13: Densité et vitesse du plasma après 6 h 40 d'évolution.

Enrichissement du modèle

Une fréquence de collisions ions-neutres constante n'est physiquement pas acceptable (cf Fig. 14),

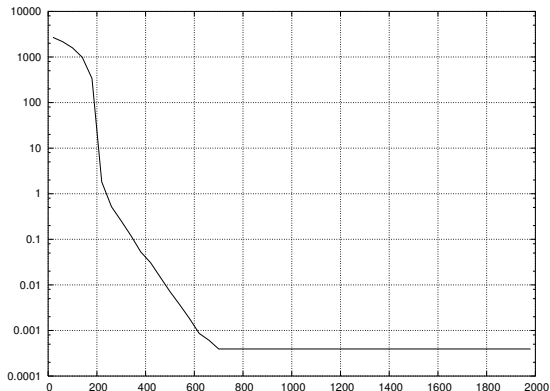


Fig. 14: Fréquence de collisions ions-neutres (s^{-1}) en fonction de l'altitude (km).

Fréquence de collisions variables

Le modèle Striations

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v_{i\alpha}}{r} n \right) + |B|^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{r v_{i\beta}}{|B|} n \right) = 0,$$

$$v_{i\alpha} = r \frac{\partial \phi}{\partial \beta}, \quad v_{i\beta} = -\frac{1}{r|B|} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(A_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(A_\beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial J_{n\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial J_{n\beta}}{\partial \beta},$$

$$A_\alpha = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} n \kappa \frac{d\gamma}{r^2 |B|^4}, \quad A_\beta = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} n \kappa \frac{r^2 d\gamma}{|B|^2},$$

$$J_{n\alpha} = - \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} n \kappa u_{n\beta} \frac{d\gamma}{r |B|^3}, \quad J_{n\beta} = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} n \kappa u_{n\alpha} \frac{r d\gamma}{|B|^2},$$

$$\kappa = \frac{m_i}{e} \nu_i.$$

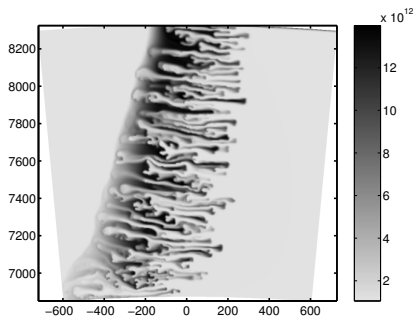
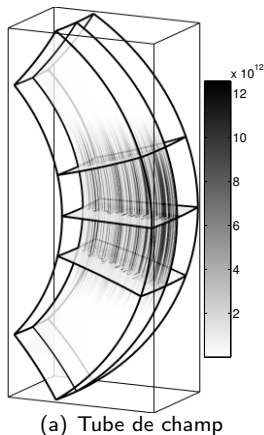
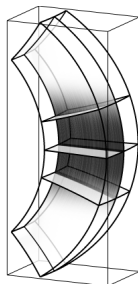
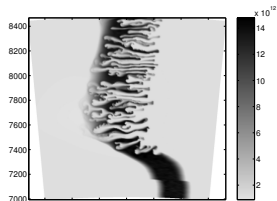


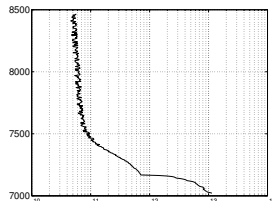
Fig. 15: Simulation avec une fréquence de collisions constante



(a) Domaine de simulation



(b) Densité de plasma (m^{-3})
sur le couche centrale à $t=2$ h



(c) $n\kappa$ intégré sur les lignes de
champ magnétique.

Fig. 16: Densité de plasma avec une fréquence de collisions ions-neutres variables.

Les collisions aux basses altitudes sont très importantes : le plasma est entraîné par le vent de neutres sans développement de l'instabilité.

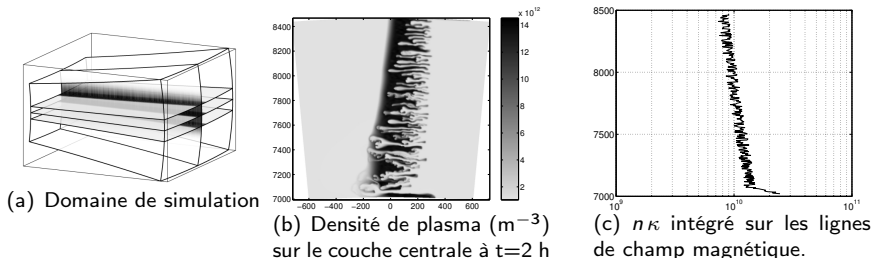


Fig. 17: Densité de plasma avec une fréquence de collisions ions-neutres variables.

Solution :

Restreindre le modèle Striations à son domaine de validité.

Plan de l'exposé

- 1 Contexte physique, motivations
- 2 Modélisation
- 3 Études du modèle Striations
- 4 Le modèle Dynamo-3D
 - Présentation du modèle Dynamo-3D
 - Propriétés du modèle Dynamo-3D
 - Difficultés numériques liées au modèle Dynamo-3D
 - Un schéma « AP » pour le modèle Dynamo-3D
- 5 Perspectives

Position du modèle Dynamo-3D dans la hiérarchie

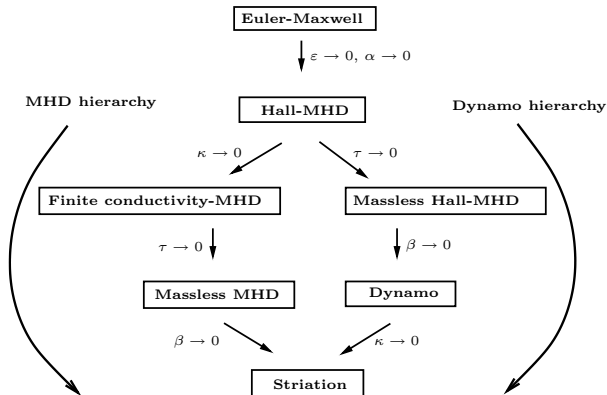
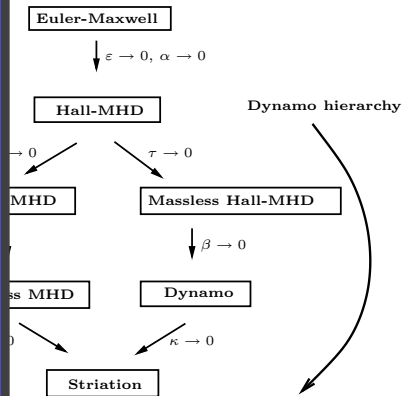


Fig. 18: Hiérarchie des modèles

Position du modèle Dynamo-3D dans la hiérarchie

Paramètres adimensionnels

- β intensité relativement au champ magnétique ambiant du champ magnétique induit,
- κ nombre de collisions e-n i-n pendant une période cyclotron,
- ε rapport des masses électronique et ionique,
- α rapport de la vitesse caractéristique à la vitesse de la lumière,
- τ rapport du temps moyen entre deux collisions ions-neutres et du temps caractéristique,
- η mesure de l'énergie thermique.



Hiérarchie des modèles

Principales hypothèses du modèle Dynamo-3D

- ☞ Quasi-neutralité : $n = n_e = n_i$;
- ☞ Champ magnétique réduit au champ magnétique terrestre ;
- ☞ Champ magnétique constant $\partial B / \partial t = 0$.

$$\begin{aligned}\partial_t n + \nabla \cdot (n u_i) &= 0, \\ u_e &= \mathbb{M}_e (-E + \kappa \nu_e u_n), \\ u_i &= \mathbb{M}_i (E + \kappa \nu_i u_n), \\ E &= -\nabla \phi, \\ \nabla \cdot j &= 0, \\ \kappa j &= n(u_i - u_e),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_e &= \begin{pmatrix} \mu_e^P & -\mu_e^H & 0 \\ \mu_e^H & \mu_e^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu_e^{\parallel} \end{pmatrix}, \\ \mathbb{M}_i &= \begin{pmatrix} \mu_i^P & \mu_i^H & 0 \\ -\mu_i^H & \mu_i^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i^{\parallel} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

avec

$$\mu_{e,i}^P = \frac{\kappa \nu_{e,i}}{(\kappa \nu_{e,i})^2 + |B|^2}, \quad \mu_{e,i}^H = \frac{|B|}{(\kappa \nu_{e,i})^2 + |B|^2}, \quad \mu_{e,i}^{\parallel} = \frac{1}{\kappa \nu_{e,i}}.$$

Le modèle Dynamo-3D

Expression en géométrie cartésienne

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu_i) = 0,$$

$$-\nabla \cdot \left[n \left(\mathbb{M}_i + \mathbb{M}_e \right) \nabla \phi \right] = -\nabla \cdot \left[n \mathbb{M}_i \left(\kappa_i u_n - \frac{\nabla P_i}{e n} \right) - n \mathbb{M}_e \left(\kappa_e u_n - \frac{\nabla P_e}{e n} \right) \right],$$

$$\phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x, \quad \partial_y \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_y, \quad \partial_z \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_z,$$

$$u_i = \mathbb{M}_i \left(E + \kappa_i u_n - \frac{\nabla P_i}{e n} \right), \quad E = -\nabla \phi,$$

$$\mu_{e,i}^P = \frac{\kappa_{e,i}}{\kappa_{e,i}^2 + |B|^2}, \quad \mu_{e,i}^H = \frac{|B|}{\kappa_{e,i}^2 + |B|^2}, \quad \mu_{e,i}^{\parallel} = \frac{1}{\kappa_{e,i}}, \quad \kappa_{e,i} = \frac{m_{e,i} \nu_{e,i}}{e},$$

$$\mathbb{M}_e = \begin{pmatrix} \mu_e^P & -\mu_e^H & 0 \\ \mu_e^H & \mu_e^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu_e^{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_i = \begin{pmatrix} \mu_i^P & \mu_i^H & 0 \\ -\mu_i^H & \mu_i^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i^{\parallel} \end{pmatrix}$$

Le modèle Dynamo-3D

Expression en géométrie cartésienne

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu_i) = 0,$$

$$-\nabla \cdot \left[n \left(\mathbb{M}_i + \mathbb{M}_e \right) \nabla \phi \right] = -\nabla \cdot \left[n \mathbb{M}_i \left(\kappa_i u_n - \frac{\nabla P_i}{e n} \right) - n \mathbb{M}_e \left(\kappa_e u_n - \frac{\nabla P_e}{e n} \right) \right],$$

$$\phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x, \quad \partial_y \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_y, \quad \partial_z \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_z,$$

$$u_i = \mathbb{M}_i \left(E + \kappa_i u_n - \frac{\nabla P_i}{e n} \right), \quad E = -\nabla \phi,$$

$$\mu_{e,i}^P = \frac{\kappa_{e,i}}{\kappa_{e,i}^2 + |B|^2}, \quad \mu_{e,i}^H = \frac{|B|}{\kappa_{e,i}^2 + |B|^2}, \quad \mu_{e,i}^{\parallel} = \frac{1}{\kappa_{e,i}}, \quad \kappa_{e,i} = \frac{m_{e,i} \nu_{e,i}}{e},$$

$$\mathbb{M}_e = \begin{pmatrix} \mu_e^P & -\mu_e^H & 0 \\ \mu_e^H & \mu_e^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu_e^{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_i = \begin{pmatrix} \mu_i^P & \mu_i^H & 0 \\ -\mu_i^H & \mu_i^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i^{\parallel} \end{pmatrix}$$

Propriétés du modèle Dynamo-3D

- 👉 Le modèle Dynamo-3D s'affranchit de l'hypothèse de conductivité alignée infinie.
 - 👉 Son utilisation est possible aux basses altitudes.
-
- Le modèle est complètement tridimensionnel : le calcul du potentiel électrique passe par la discrétisation d'une équation elliptique en trois dimensions ;
 - ce système risque d'être mal conditionné en raison des fortes disparités des mobilités.

Ordre de grandeurs des mobilités

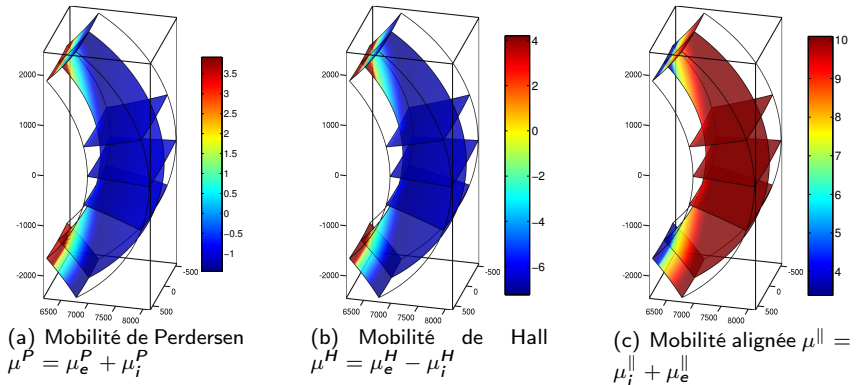


Fig. 19: Mobilités en $\text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$ (échelle logarithme décimal).

Mise en évidence du mauvais conditionnement de l'équation du potentiel discrétisée

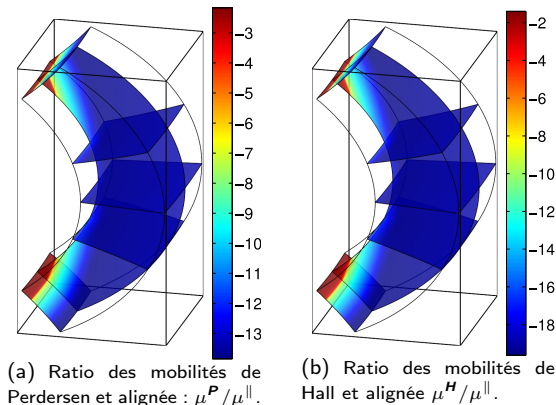


Fig. 20: Ratio des mobilités en échelle logarithme décimal.

Équation du potentiel électrique

$$-\nabla \cdot (\mathbb{M} \nabla \phi) = -\nabla \cdot J_n,$$

avec

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}_e + \mathbb{M}_i$$

$$= \begin{pmatrix} \mu^P & -\mu^H & 0 \\ \mu^H & \mu^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu^\parallel \end{pmatrix},$$

et

$$\mu^P = \mu_e^P + \mu_i^P,$$

$$\mu^H = \mu_e^H - \mu_i^H,$$

$$\mu^\parallel = \mu_e^\parallel + \mu_i^\parallel.$$

Mise en évidence du mauvais conditionnement de l'équation du potentiel discrétisée

Résolution de : $\mathcal{A}_h \phi_h = b_h$, discrétisation de $-\nabla \cdot (\mathbb{M} \nabla \phi) = b$ (+ Boundary cond.).

Calcul du résidu $R = (\mathcal{A}_h \phi_h - b_h)/b_h$ pour $b_h = 1$ (R_1) d'une part et $b_h \approx -\nabla \cdot J_n$ (R_J) d'autre part.

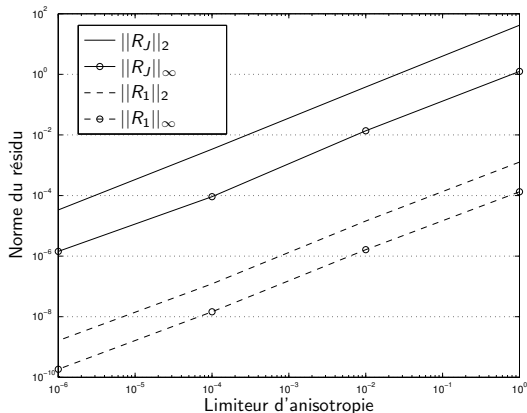


Fig. 21: Norme du résidu en fonction du limiteur d'anisotropie. Solveur du système linéaire : CG+ILU, sur un maillage de $50 \times 50 \times 50$ nœuds.

Analyse de l'explosion du conditionnement

Modèle Dynamo-3D

$$-\nabla \cdot (\mathbb{M} \nabla \phi) = -\nabla \cdot J_n, \text{ dans } \Omega, \quad \begin{cases} \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x \\ \partial_n \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_y \cup \partial\Omega_z \end{cases},$$

avec
$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu^P & -\mu^H & 0 \\ \mu^H & \mu^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu^\parallel \end{pmatrix}, \quad \mu^\parallel \gg \mu^P, \mu^H.$$

Problème modèle

$$\begin{cases} -\partial_x(A \partial_x \phi^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_z(B \partial_z \phi^\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega, & (*) \\ \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x, & \partial_z \phi^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_z. \end{cases}$$

Que peut-on attendre des méthodes numériques standards ?

- 👉 Pour $\varepsilon \ll 1$ consistance avec $\partial_z(B \partial_z \phi^\varepsilon) = 0$ dans Ω avec $\partial_z \phi^\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega_z$.
- 👉 Explosion du conditionnement avec $\varepsilon \rightarrow 0$.

Analyse de l'explosion du conditionnement

Modèle Dynamo-3D

$$-\nabla \cdot (\mathbb{M} \nabla \phi) = -\nabla \cdot J_n, \text{ dans } \Omega, \quad \begin{cases} \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x \\ \partial_n \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_y \cup \partial\Omega_z \end{cases},$$

avec
$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu^P & -\mu^H & 0 \\ \mu^H & \mu^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu^\parallel \end{pmatrix}, \quad \mu^\parallel \gg \mu^P, \mu^H.$$

Problème modèle

$$\begin{cases} -\partial_x(A \partial_x \phi^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_z(B \partial_z \phi^\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega, & (*) \\ \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x, & \partial_z \phi^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_z. \end{cases}$$

Que peut-on attendre des méthodes numériques standards ?

- 👉 Pour $\varepsilon \ll 1$ consistance avec $\partial_z(B \partial_z \phi^\varepsilon) = 0$ dans Ω avec $\partial_z \phi^\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega_z$.
- 👉 Explosion du conditionnement avec $\varepsilon \rightarrow 0$.

Analyse

Régime limite

$\phi^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi^\varepsilon$ is the solution of
 $\partial_x(\bar{A} \partial_x \phi^0) = \bar{f}$ dans Ω , $\phi = 0$ sur $\partial\Omega_x$.

En effet :

👉 ϕ^ε vérifie $-\partial_x(\overline{A \partial_x \phi^\varepsilon}) = \bar{f}$ in Ω , pour $\varepsilon > 0$,
avec : $\bar{f} = 1/L_z \int_0^{L_z} f(x, z) dz$.

👉 Eq. (*) dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ donne $\partial_z \phi^0 = 0$

Problème modèle

$$\begin{cases} -\partial_x(A \partial_x \phi^\varepsilon) - 1/\varepsilon \partial_z(B \partial_z \phi^\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \quad (*) \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega_x, \quad \partial_z \phi^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_z. \end{cases}$$

Que peut-on attendre des méthodes numériques standards ?

- 👉 Pour $\varepsilon \ll 1$ consistance avec
 $\partial_z(B \partial_z \phi^\varepsilon) = 0$ dans Ω avec $\partial_z \phi^\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega_z$.
- 👉 Explosion du conditionnement avec $\varepsilon \rightarrow 0$.

Analyse

Régime limite : limite singulière

$\phi^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi^\varepsilon$ is the solution of

$$\partial_x(\bar{A} \partial_x \phi^0) = \bar{f} \text{ dans } \Omega, \quad \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x.$$

En effet :

👉 ϕ^ε vérifie $-\partial_x(\overline{A \partial_x \phi^\varepsilon}) = \bar{f}$ in Ω , pour $\varepsilon > 0$,
avec : $\bar{f} = 1/L_z \int_0^{L_z} f(x, z) dz$.

👉 Eq. (*) dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ donne $\partial_z \phi^0 = 0$

Problème modèle

$$\begin{cases} -\partial_x(A \partial_x \phi^\varepsilon) - 1/\varepsilon \partial_z(B \partial_z \phi^\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \quad (*) \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega_x, \quad \partial_z \phi^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_z. \end{cases}$$

Que peut-on attendre des méthodes numériques standards ?

👉 Pour $\varepsilon \ll 1$ consistance avec

$$\partial_z(B \partial_z \phi^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ avec } \partial_z \phi^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_z.$$

👉 Explosion du conditionnement avec $\varepsilon \rightarrow 0$.

Les schémas préservant l'asymptotique

Concepts généraux

☞ Intérêt des Schémas-AP ?

- Consistance avec le modèle original P^ε pour $\varepsilon = \mathcal{O}(1)$
- Consistance avec le problème limite P^0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$
- Stabilité uniforme / paramètre de l'asymptotique ε

☞ Mise en œuvre

- Identification du problème modèle
- Reformulation du modèle (limite singulière)
- Discrétisation implicite

Les schémas préservant l'asymptotique

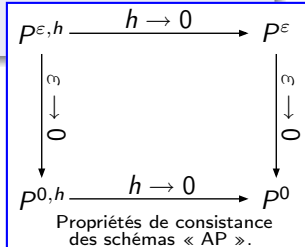
Concepts généraux

☞ Intérêt des Schémas-AP ?

- Consistance avec le modèle original P^ε pour $\varepsilon = \mathcal{O}(1)$
- Consistance avec le problème limite P^0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$
- Stabilité uniforme / paramètre de l'asymptotique ε

☞ Mise en œuvre

- Identification du problème modèle
- Reformulation du modèle (limite singulière)
- Discrétisation implicite



Les schémas préservant l'asymptotique

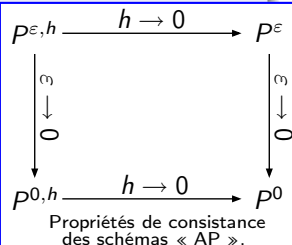
Concepts généraux

☞ Intérêt des Schémas-AP ?

- ☞ Consistance avec le modèle original P^ε pour $\varepsilon = \mathcal{O}(1)$
- ☞ Consistance avec le problème limite P^0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$
- ☞ Stabilité uniforme / paramètre de l'asymptotique ε

☞ Mise en œuvre

- ☞ Identification du problème modèle
- ☞ Reformulation du modèle (limite singulière)
- ☞ Discrétisation implicite



Les schémas préservant l'asymptotique

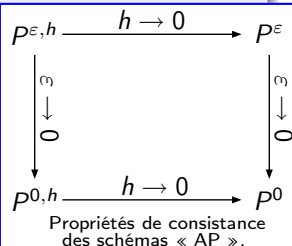
Concepts généraux

☞ Intérêt des Schémas-AP ?

- ☞ Consistance avec le modèle original P^ε pour $\varepsilon = \mathcal{O}(1)$
- ☞ Consistance avec le problème limite P^0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$
- ☞ Stabilité uniforme / paramètre de l'asymptotique ε

☞ Mise en œuvre

- ☞ Identification du problème modèle
- ☞ Reformulation du modèle (limite singulière)
- ☞ Discrétisation implicite



Les schémas préservant l'asymptotique

Concepts généraux

☞ Intérêt des Schémas-AP ?

- ☞ Consistance avec le modèle original P^ε pour $\varepsilon = \mathcal{O}(1)$
- ☞ Consistance avec le problème limite P^0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$
- ☞ Stabilité uniforme / paramètre de l'asymptotique ε

☞ Mise en œuvre

- ☞ Identification du problème modèle
- ☞ Reformulation du modèle (limite singulière)
- ☞ Discrétisation implicite

Construction du schéma AP

Décomposition « Macro-Micro »

$$\phi(x, z) = \bar{\phi}(x) + \phi'(x, z),$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{L_z} \int \phi(x, z) dz, \quad \phi'(x, z) = \phi(x, z) - \bar{\phi}(x), \quad \bar{\phi}' = 0,$$

Problème reformulé

Problème elliptique de Dimension $D - 1$ pour $\bar{\phi}$

$$\partial_x(\bar{A} \partial_x \bar{\phi}) = \bar{f} + \partial_x(\overline{A'_x \partial_x \phi'}) , \quad \bar{\phi} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x,$$

Problème elliptique de dimension D (bien conditionné) pour ϕ'

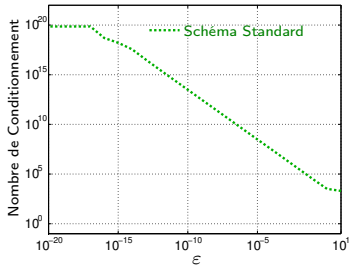
$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_z(A_z \partial_z \phi') - \varepsilon \partial_x(A_x \partial_x \phi') = \varepsilon f + \varepsilon \partial_x(A_x \partial_x \bar{\phi}) , \\ \partial_z \phi' = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_x \times \partial\Omega_z, \quad \phi' = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_x \times \Omega_z, \\ \bar{\phi}' = 0, \quad \text{dans} \quad \Omega_x. \end{array} \right.$$

Construction du schéma

Décomposition « Macro-Micro »

$$\phi(x, z)$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{L_z} \int \phi(x, z) dz,$$



Conditionnement en fonction de ε .

Problème de perturbation singulière (Dynamo-3D)

$$\begin{cases} -\partial_x(A \partial_x \phi^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_z(B \partial_z \phi^\varepsilon) = f & \text{in } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega_x, \quad \partial_z \phi^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega_z. \end{cases} \quad (*)$$

- Numériquement inexploitable pour $\varepsilon \ll 1$.
- Modèle valide $\forall \varepsilon$

Modèle limite (Striations)

$$\partial_x(\bar{A} \partial_x \bar{\phi}) = \bar{f} \text{ in } \Omega, \quad \bar{\phi} = 0 \text{ on } \partial\Omega_x.$$

- Conditionnement indépendant de ε
- Modèle valide pour $\varepsilon \ll 1$

Schéma AP pour le problème de perturbation singulière (Dynamo-3D)

$$\begin{aligned} \partial_x(\bar{A} \partial_x \bar{\phi}) &= \bar{f} + \partial_x \left(\overline{A'_x \partial_x \phi'} \right), \quad \bar{\phi} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x, \\ -\partial_z(A_x \partial_z \phi') - \varepsilon \partial_x(A_x \partial_x \phi') &= \varepsilon f + \varepsilon \partial_x \left(A_x \partial_x \bar{\phi} \right), \\ \partial_z \phi' &= 0 \text{ sur } \Omega_x \times \partial\Omega_z, \quad \phi' = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x \times \Omega_z, \\ \bar{\phi}' &= 0, \text{ dans } \Omega_x. \end{aligned}$$

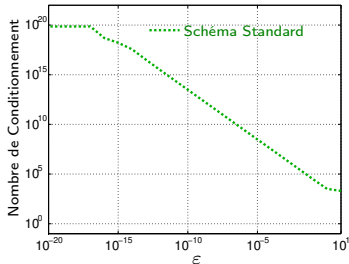
- Conditionnement indépendant de ε
- Modèle valide $\forall \varepsilon$

Construction du schéma

Décomposition « Macro-Micro »

$$\phi(x, z)$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{L_z} \int \phi(x, z) dz ,$$



Conditionnement en fonction de ε .

Problème de perturbation singulière (Dynamo-3D)

$$\begin{cases} -\partial_x(A \partial_x \phi^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_z(B \partial_z \phi^\varepsilon) = f \text{ in } \Omega, & (*) \\ \phi = 0 \text{ on } \partial\Omega_x, & \partial_z \phi^\varepsilon = 0 \text{ on } \partial\Omega_z. \end{cases}$$

❗ Numériquement inexploitable pour $\varepsilon \ll 1$.

❗ Modèle valide $\forall \varepsilon$

Modèle limite (Striations)

$$\partial_x(\bar{A} \partial_x \bar{\phi}) = \bar{f} \text{ in } \Omega, \quad \bar{\phi} = 0 \text{ on } \partial\Omega_x.$$

❗ Conditionnement indépendant de ε

❗ Modèle valide pour $\varepsilon \ll 1$

Schéma AP pour le problème de perturbation singulière (Dynamo-3D)

$$\partial_x(\bar{A} \partial_x \bar{\phi}) = \bar{f} + \partial_x \left(\overline{A'_x \partial_x \phi'} \right), \quad \bar{\phi} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x,$$

$$\begin{aligned} -\partial_z(A_x \partial_z \phi') - \varepsilon \partial_x(A_x \partial_x \phi') &= \varepsilon f + \varepsilon \partial_x(A_x \partial_x \bar{\phi}), \\ \partial_z \phi' &= 0 \text{ sur } \Omega_x \times \partial\Omega_z, \quad \phi' = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x \times \Omega_z, \\ \bar{\phi}' &= 0, \text{ dans } \Omega_x. \end{aligned}$$

❗ Conditionnement indépendant de ε

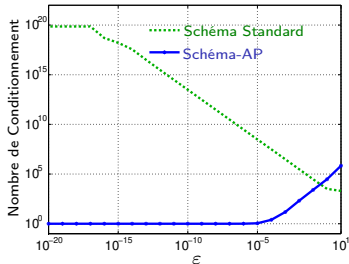
❗ Modèle valide $\forall \varepsilon$

Construction du schéma

Décomposition « Macro-Micro »

$$\phi(x, z)$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{L_z} \int \phi(x, z) dz,$$



Conditionnement en fonction de ε .

Problème de perturbation singulière (Dynamo-3D)

$$\begin{cases} -\partial_x(A \partial_x \phi^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_z(B \partial_z \phi^\varepsilon) = f & \text{in } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega_x, \quad \partial_z \phi^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega_z. \end{cases} \quad (*)$$

Numériquement inexploitable pour $\varepsilon \ll 1$.

Modèle valide $\forall \varepsilon$

Modèle limite (Striations)

$$\partial_x(\bar{A} \partial_x \phi^0) = \bar{f} \text{ in } \Omega, \quad \phi = 0 \text{ on } \partial\Omega_x.$$

Conditionnement indépendant de ε

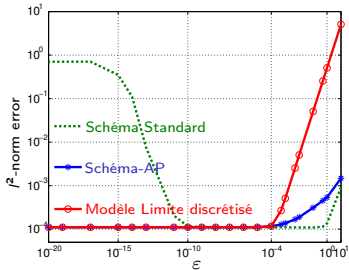
Modèle valide pour $\varepsilon \ll 1$

Schéma AP pour le problème de perturbation singulière (Dynamo-3D)

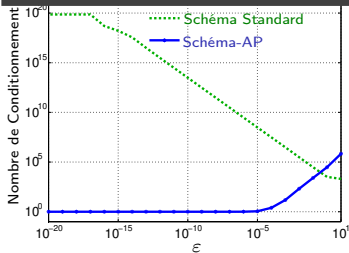
$$\begin{aligned} \partial_x(\bar{A} \partial_x \bar{\phi}) &= \bar{f} + \partial_x \left(\overline{A'_x \partial_x \phi'} \right), \quad \bar{\phi} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x, \\ -\partial_z(A_z \partial_z \phi') - \varepsilon \partial_x(A_x \partial_x \phi') &= \varepsilon f + \varepsilon \partial_x \left(A_x \partial_x \bar{\phi} \right), \\ \partial_z \phi' &= 0 \text{ sur } \bar{\Omega}_x \times \partial\Omega_z, \quad \phi' = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x \times \bar{\Omega}_z, \\ \bar{\phi}' &= 0, \text{ dans } \Omega_x. \end{aligned}$$

Conditionnement indépendant de ε

Modèle valide $\forall \varepsilon$



Erreur avec la solution exacte en fonction de ε



Conditionnement en fonction de ε .

Problème de perturbation singulière (Dynamo-3D)

$$\begin{cases} -\partial_{\mathbf{x}}(A \partial_{\mathbf{x}} \phi^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\mathbf{z}}(B \partial_{\mathbf{z}} \phi^\varepsilon) = f & \text{in } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega_{\mathbf{x}}, \quad \partial_{\mathbf{z}} \phi^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega_{\mathbf{z}}. \end{cases} \quad (*)$$

↳ Numériquement inexploitable pour $\varepsilon \ll 1$.

↳ Modèle valide $\forall \varepsilon$

Modèle limite (Striations)

$$\partial_{\mathbf{x}}(\bar{A} \partial_{\mathbf{x}} \phi^0) = \bar{f} \text{ in } \Omega, \quad \phi = 0 \text{ on } \partial\Omega_{\mathbf{x}}.$$

↳ Conditionnement indépendant de ε

↳ Modèle valide pour $\varepsilon \ll 1$

Schéma AP pour le problème de perturbation singulière (Dynamo-3D)

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}}(\bar{A} \partial_{\mathbf{x}} \bar{\phi}) &= \bar{f} + \partial_{\mathbf{x}} \left(\overline{A'_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}} \phi'} \right), \quad \bar{\phi} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\mathbf{x}}, \\ -\partial_{\mathbf{z}}(A_{\mathbf{z}} \partial_{\mathbf{z}} \phi') - \varepsilon \partial_{\mathbf{x}}(A_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}} \phi') &= \varepsilon f + \varepsilon \partial_{\mathbf{x}} \left(A_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}} \bar{\phi} \right), \\ \partial_{\mathbf{z}} \phi' &= 0 \text{ sur } \Omega_{\mathbf{x}} \times \partial\Omega_{\mathbf{z}}, \quad \phi' = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\mathbf{x}} \times \Omega_{\mathbf{z}}, \\ \bar{\phi}' &= 0, \text{ dans } \Omega_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

↳ Conditionnement indépendant de ε

↳ Modèle valide $\forall \varepsilon$

Plan de l'exposé

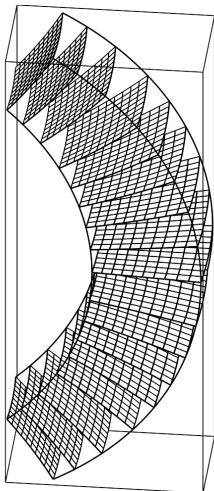
- 1 Contexte physique, motivations
- 2 Modélisation
- 3 Études du modèle Striations
- 4 Le modèle Dynamo-3D
- 5 Perspectives
 - Fortes variations spatiales de l'anisotropie
 - Couplage de modèles
 - Passage à des coordonnées non adaptées ?

Problématique

Dans le problème modèle la rapport d'anisotropie est une constante et les variations des coefficients de diffusion sont d'ordre un. En réalité l'anisotropie présente de très fortes variations.

Quelques pistes

- 1 Première solution basée sur une forme non conservative de l'équation.
- 2 Utilisation de méthodes numériques de type Scharfetter-Gummel.

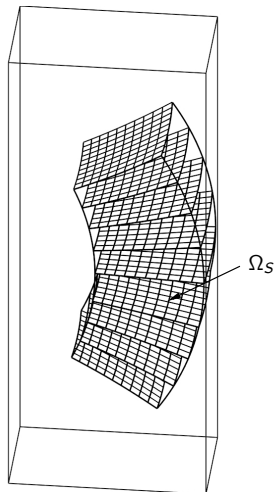


Problématique :

- ✎ La résolution numérique de Dynamo-3D est très coûteuse.
- ✎ Le modèle Striations ne peut pas être utilisé dans tout le domaine.

Strategie de couplage :

- Modèle Striations pour les hautes altitudes $\Omega_S \rightarrow \phi^S$,
- Modèle Dynamo-3D pour les basses altitudes $\Omega_i \rightarrow \phi^i, i = 1, 2$,
- Conditions de raccordement $\sum_{i=1,2}, \phi^i|_{\Sigma_i} = \phi^S|_{\Sigma_i}$.

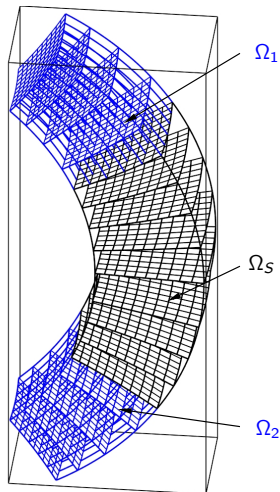


Problématique :

- La résolution numérique de Dynamo-3D est très coûteuse.
- Le modèle Striations ne peut pas être utilisé dans tout le domaine.

Strategie de couplage :

- Modèle Striations pour les hautes altitudes $\Omega_S \rightarrow \phi^S$,
- Modèle Dynamo-3D pour les basses altitudes $\Omega_i \rightarrow \phi^i, i = 1, 2$,
- Conditions de raccordement $\sum_{i=1,2} \phi^i|_{\Sigma_i} = \phi^S|_{\Sigma_i}$.

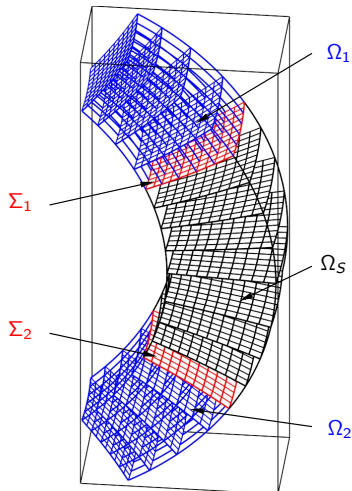


Problématique :

- La résolution numérique de Dynamo-3D est très coûteuse.
- Le modèle Striations ne peut pas être utilisé dans tout le domaine.

Strategie de couplage :

- Modèle Striations pour les hautes altitudes $\Omega_S \rightarrow \phi^S$,
- Modèle Dynamo-3D pour les basses altitudes $\Omega_i \rightarrow \phi^i, i = 1, 2$,
- Conditions de raccordement $\sum_{i,i=1,2},$
 $\phi^i|_{\Sigma_i} = \phi^S|_{\Sigma_i}.$



Problématique :

- La résolution numérique de Dynamo-3D est très coûteuse.
- Le modèle Striations ne peut pas être utilisé dans tout le domaine.

Strategie de couplage :

- Modèle Striations pour les hautes altitudes $\Omega_S \rightarrow \phi^S$,
- Modèle Dynamo-3D pour les basses altitudes $\Omega_i \rightarrow \phi^i, i = 1, 2$,
- Conditions de raccordement $\Sigma_i, i=1,2$,

$$\phi^i|_{\Sigma_i} = \phi^S|_{\Sigma_i}.$$

Limitations de la démarche actuelle

- 👉 La construction du système de coordonnées orthogonales n'est possible que pour des champs magnétiques bien particuliers,
- 👉 Évolution du champ magnétique B difficilement prise en compte (même avec B donné).

Schémas AP en coordonnées non adaptées

- Formulation variationnelle avec fonctions test dans \mathcal{K} et \mathcal{K}^\perp

$$\mathcal{K} = \{f / B \cdot \nabla f = 0\}$$

- Multiplicateurs de Lagrange pour éviter la discrétisation de \mathcal{K} et \mathcal{K}^\perp .

Résultats préliminaires

- 📖 S. Brull, P. Degond, F. Deluzet, M.-H. Vignal, *An asymptotic Scheme for the Euler-Lorentz system for strong magnetic field*, en préparation
- 📖 P. Degond, F. Deluzet, J. Narski, C. Negulescu, *Numerical scheme for highly anisotropic diffusion equation with non adapted coordinate systems*, en préparation