Réunion plénière ANR Iodissee

Sebastian Minjeaud

Christophe Besse et Pauline Lafitte

Project-Team SIMPAF, INRIA Lille-Nord Europe.

Lille, le 13 janvier 2011

Objectifs

▶ Obtenir une **description "probable"** de la configuration de l'ionosphère à un instant donné

$\rightsquigarrow$ **représentations de la densité électronique**

♦ compléter le code existant (*cf* présentation de C. Yang) par l'ajout de termes de force (gravité, champ électrique ambiant...)

♦ tenir compte des fluctuations à plus petites échelles dues à la turbulence

▶ Construire un **module de propagation d'onde** dans le milieu obtenu à la première étape

♦ Approximation de l'optique géométrique

▶ Informations statistiques sur les **modifications de l'amplitude et de la phase des signaux** se propageant à travers l'ionosphère.

Plan

1. Description de la turbulence à partir du spectre de turbulence

2. Propagation d'ondes

phénoménologie de Richardson

transfert d'énergie en cascade des grandes échelles vers les petites échelles

Richardson, 1922

- **Grande échelle** :

  injection de l'énergie nécessaire au développement de la turbulence

$\rightsquigarrow$ peu importe le mécanisme, son influence est perdue dans la cascade.

- **Petite échelle** :

  dissipation de l'énergie (viscosité...)

- **Zone inertielle (gamme d'échelles intermédiaires)** :

  redistribution de l'énergie à des structures de tailles plus petites.

$\rightsquigarrow$ turbulence homogène et isotrope (perte d'information statistique concernant le mécanisme d'injection)

$\rightsquigarrow$ Loi universelle de Kolmogorov :

$$E(\kappa) \sim \kappa^{-5/3}$$

où $E(k)$ est le spectre de turbulence en module du nombre d'onde.

Kolmogorov, 1941

Certaines lacunes corrigées par (K62) (intermittence...)

- Corrélation double en vitesse

$$Q_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{r}) = \langle \mathbf{u}_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle \equiv Q_{ij}(r)$$

- Spectre tridimensionnel en vecteur d'onde

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) \equiv \Phi_{ij}(\kappa) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{\mathbb{R}^3} Q_{ij}(\mathbf{r})e^{-\mathbf{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\ d\mathbf{r}$$

- Lien avec l'énergie cinétique :

$$\left\langle \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 \right\rangle = 2\pi\int_0^\infty \kappa^2 \sum_{i=1}^{3}\Phi_{ii}(\kappa)d\kappa$$

preuve :

- $\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} Q_{ii}(0)$
- $Q_{ij}(r) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})e^{\mathbf{i}\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\kappa}}\ d\boldsymbol{\kappa}$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty \Phi_{ij}(\kappa)\int_0^\pi \left[e^{\mathbf{i}r\kappa\cos\phi}\kappa^2\sin\phi\ d\phi\right]\ d\kappa$$

$$= 4\pi\int_0^\infty \Phi_{ij}(\kappa)\kappa^2\frac{\sin(r\kappa)}{r\kappa}\ d\kappa$$

- Spectre monodimensionnel : $E(\kappa) = 2\pi\kappa^2\sum_{i=1}^{3}\Phi_{ii}(\kappa)$

Pas de théorie universelle connue....

Identification expérimentale avec un certain succès :

Booker, 1979

$$\Phi(\boldsymbol{\kappa}) \sim \kappa^{-\nu}$$

valable pour la gamme d'échelle entre l_0 et L_0.

- **Indice spectral** ν :

$$3 < \nu < 4$$

- **Grande échelle de turbulence** L_0 :

"The effective outer scale emerges as a somewhat arbitrary division between the well-developed structures that can be modeled by a statistically random process and the evolving structures that depend on the initial configuration of the plasma at the time of instability onset." Rino, 79

$$5\text{km} < L_0 < 20\text{km}$$

- **Petite échelle de turbulence** l_0 :

$$2\text{m} < l_0 < 5\text{m}$$

Formule de filtrage par convolution

Soit h est une fonction déterministe réelle paire.

$$\text{Si } \varrho(\mathbf{x}) = \varrho^0 * h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \varrho^0(\mathbf{y}) h(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$$\text{alors } \Phi_\varrho(\boldsymbol{\kappa}) = \Phi_{\varrho^0}(\boldsymbol{\kappa}) |\mathcal{F}(h)(\boldsymbol{\kappa})|^2$$

preuve :

$$\begin{aligned}
Q_\varrho(\mathbf{r}) = \langle \varrho(\mathbf{0})\varrho(\mathbf{r})\rangle &= \left\langle \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \varrho^0(\mathbf{y})\varrho^0(\mathbf{z}) h(-\mathbf{y}) h(\mathbf{r}-\mathbf{z}) d\mathbf{y} d\mathbf{z} \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} Q_{\varrho^0}(\mathbf{z}-\mathbf{y}) h(\mathbf{y}) h(\mathbf{r}-\mathbf{z}) d\mathbf{y} d\mathbf{z} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} Q_{\varrho^0}(\theta) h(\mathbf{z}-\theta) h(\mathbf{r}-\mathbf{z}) d\theta d\mathbf{z} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} Q_{\varrho^0}(\theta) \int_{\mathbb{R}^3} h(\mathbf{z}) h(\mathbf{r}-\theta-\mathbf{z}) d\mathbf{z} d\theta \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} Q_{\varrho^0}(\theta) h * h(\mathbf{r}-\theta) d\theta \\
&= Q_{\varrho^0} * h * h(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Objectif : Générer ϱ connaissant Φ_ϱ.

$$\varrho = \varrho^0 * h = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\varrho^0)\mathcal{F}(h)\right).$$

Stam, Fiume, 1993

- Maillage cartésien $N_x \times N_y \times N_z$.
- On génère directement $\mathcal{F}(\varrho^0)$
  - On choisit pour ϱ^0 un bruit blanc, *i.e.* $\Phi_{\varrho^0} = \text{cste}$.
  - $\mathcal{F}(\varrho^0) \leftrightsquigarrow W_{ijk} = (\alpha_{ijk} + \mathbf{i}\beta_{ijk})\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, α_{ijk} et β_{ijk} indépendante et suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$
  (en fait il faut respecter certaines symétries...)
- On calcule $\mathcal{F}(h)$ en utilisant la formule de filtrage :

$$\Phi_\varrho(\boldsymbol{\kappa}) = |\mathcal{F}(h)(\boldsymbol{\kappa})|^2 \leftrightsquigarrow H_{ijk} = \Phi_\varrho(\kappa_i, \kappa_j, \kappa_k)^{\frac{1}{2}}.$$

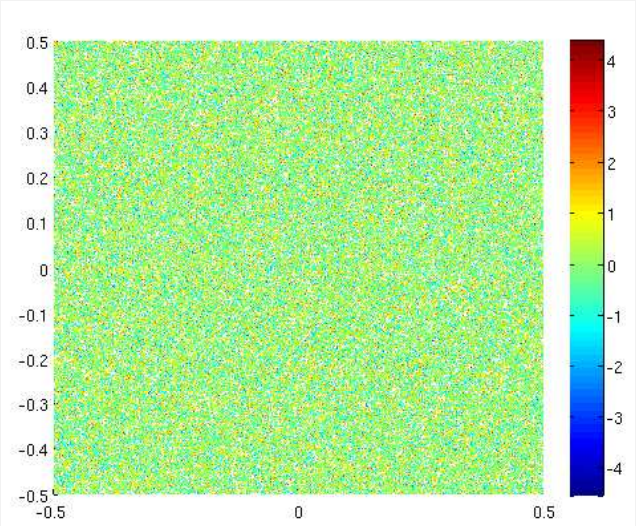
- On en déduit la transformée de fourier de ϱ :

$$\mathcal{F}(\varrho) = \left(\mathcal{F}(\varrho^0)\mathcal{F}(h)\right) \leftrightsquigarrow (\mathcal{F}R)_{ijk} = W_{ijk}H_{ijk}.$$

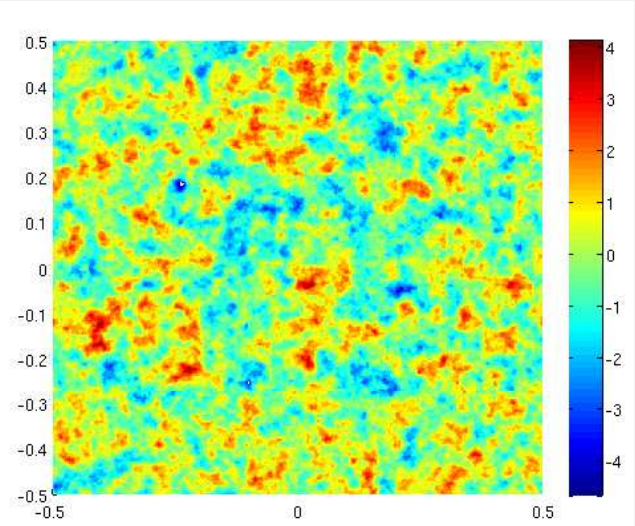
- On inverse la transformée de fourier :

$$R = \frac{N_x N_y N_z}{|H|}\ \mathrm{IFFT}\left[\mathcal{F}R\right].$$

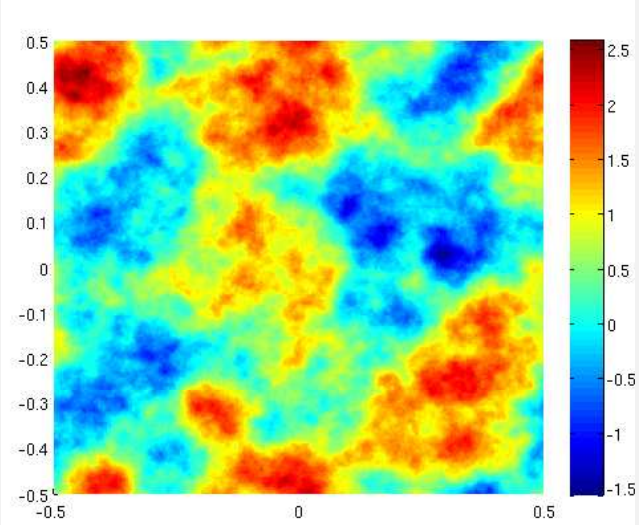
$$\Phi(\boldsymbol{\kappa}) = \left(1 + (L_0\kappa)^2\right)^{-\frac{11}{6}}$$



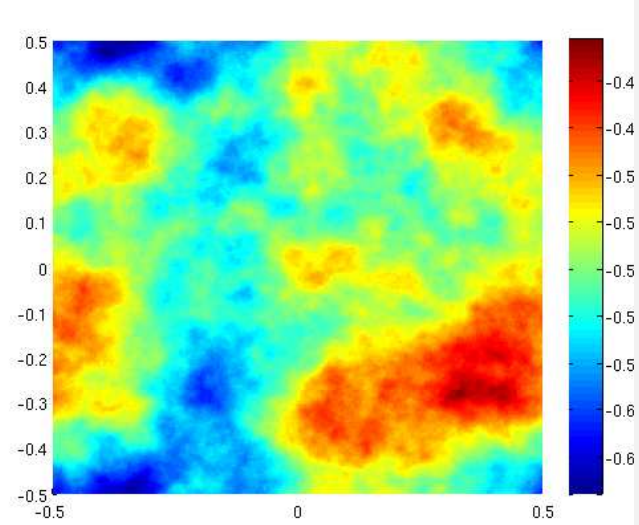
Pas de corrélation



$L_0 = 0.1$

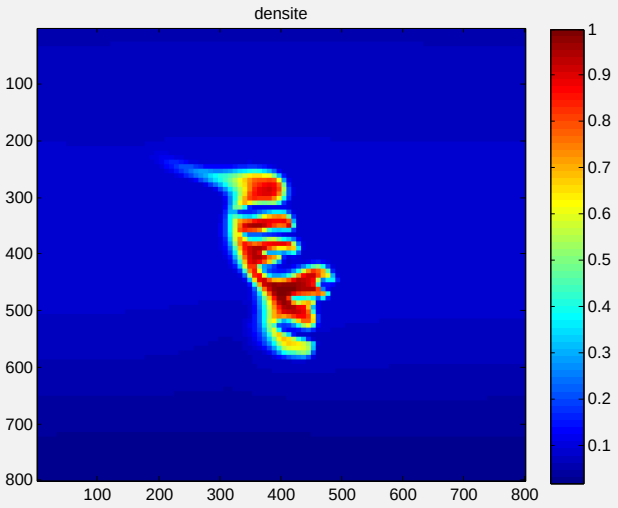


$L_0 = 1$

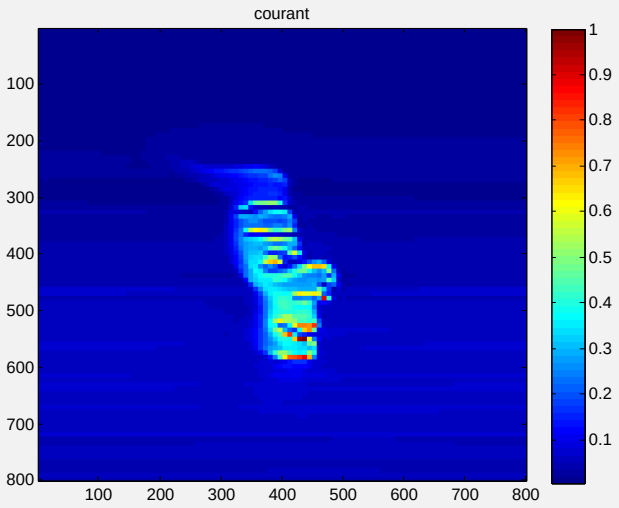


$L_0 = 10$

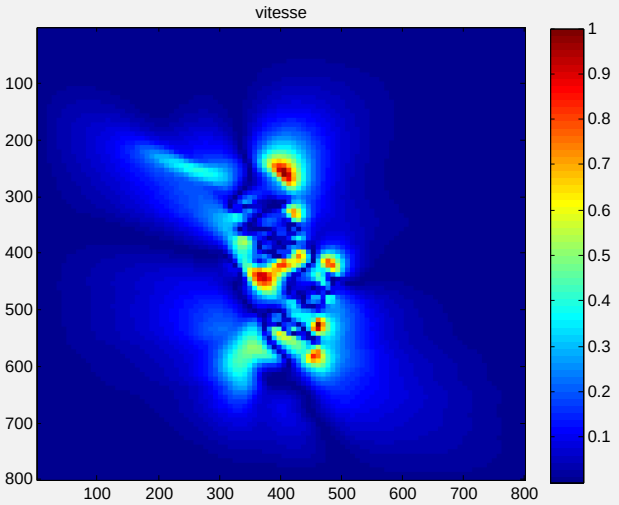
Instabilités de grande échelle $\rightsquigarrow$ modèle STRIATION



Densité ϱ



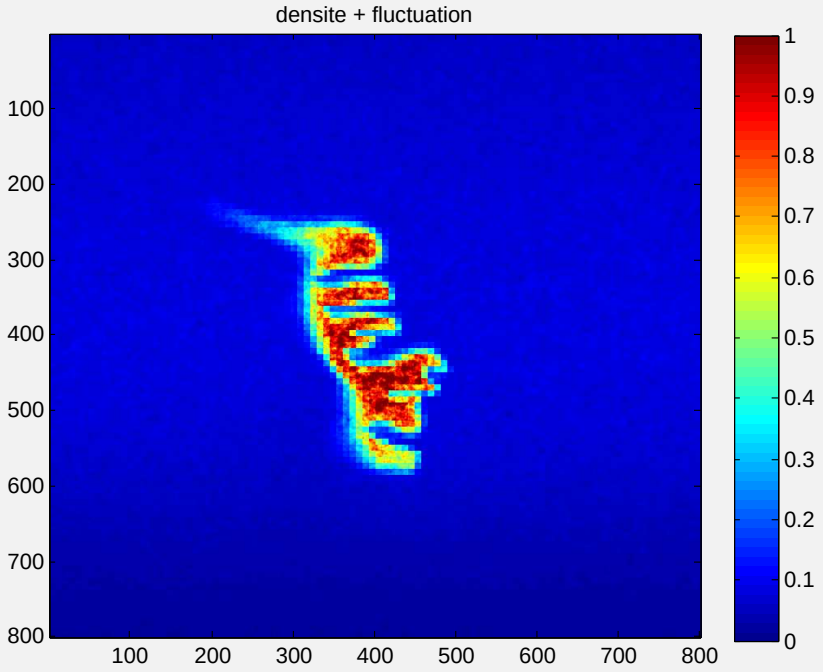
Norme du vecteur courant $|j|$



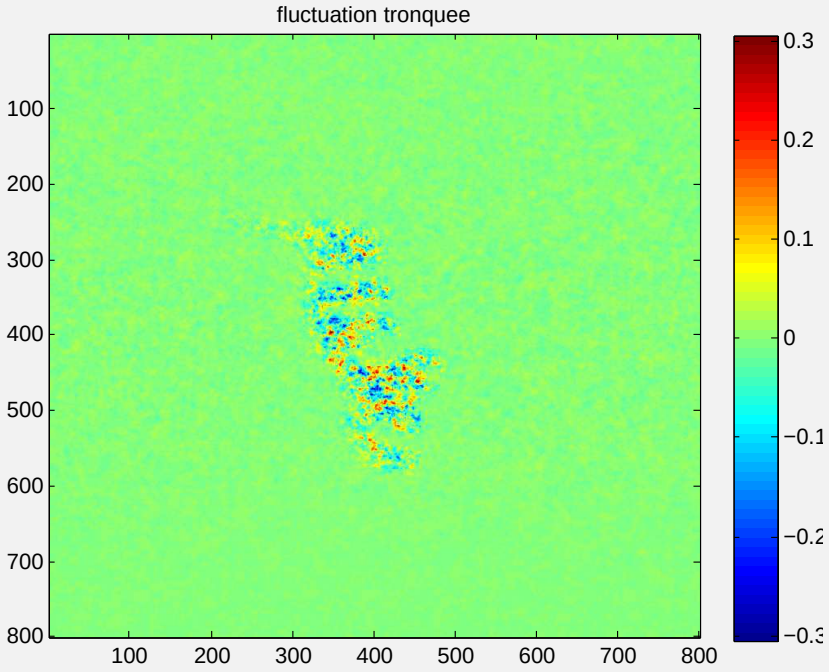
Norme du vecteur vitesse $|\mathbf{u}|$

Superposition de fluctuations générées aléatoirement

$$\varrho(1 + 0.1\varrho_f)$$



Résultat de la superposition



Différence avec la valeur ambiante

- Simulations 3D (le principe est exactement le même)

- Prise en compte des valeurs “physiques” des paramètres

- Prise en compte de l’anisotropie dans le spectre donnant les fluctuations :
  - étirements des perturbations le long des lignes de champs.
  - Modèle de Booker :

$$\Phi(\boldsymbol{\kappa}) \sim \frac{\kappa^{-\nu}}{[1 + (\mathcal{A}^2 - 1)\cos^2\psi]^{\frac{\nu}{2}}}$$

où $2 < \mathcal{A} < 25$ est un coefficient d’anisotropie,
et (κ, ψ, ω) sont les coordonnées sphériques.

Plan

1 Description de la turbulence à partir du spectre de turbulence

2 Propagation d'ondes

Propriétés du milieu

- L'indice de réfraction dépend de la densité électronique ϱ :

$$n(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{e^2}{4\pi^2 m_e \epsilon_0} \frac{\varrho(\mathbf{x})}{f^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

avec e la charge élémentaire, m_e la masse d'un électron, ϵ_0 la permittivité du vide, f la fréquence du signal.

EDO satisfaites par les caractéristiques du signal

Wheelon, 2001

- Trajectoire $\mathbf{r}$:

$$\frac{d}{ds}\left[n\big(\mathbf{r}(\cdot)\big)\frac{d}{ds}\big(\mathbf{r}(\cdot)\big)\right](s) = \nabla n\big(\mathbf{r}(s)\big).$$

- Phase Φ :

$$\frac{d}{ds}\left[\Phi\big(\mathbf{r}(\cdot)\big)\right](s) = n\big(\mathbf{r}(s)\big).$$

- Amplitude A :

$$A\big(\mathbf{r}(s)\big) = A_0\left[\frac{n\big(\mathbf{r}(s)\big)}{n\big(\mathbf{r}(0)\big)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$