Bilan de résolution des modèles ionosphériques et des difficultés

YANG Chang

12/06/2012

Plasma Froid: Perturbations Ionosphériques

Plasma froid

- Températures $<$ 100000 Kelvins
- Milieux collisionnels
- Exemples:
  - ⋆ Ionosphère

Scintillations ionosphériques

Indisponibilité principale de la communication Terre-satellites

Plasma Froid: Perturbations Ionosphériques

Plasma froid

- Températures $<$ 100000 Kelvins
- Milieux collisionnels
- Exemples:
  - ⋆ Ionosphère

Scintillations ionosphériques

Indisponibilité principale de la communication Terre-satellites

Projet IODISSEE

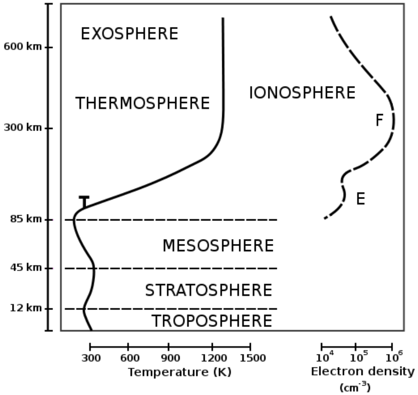
Etudier perturbations ionosphériques et communications terre- satellites

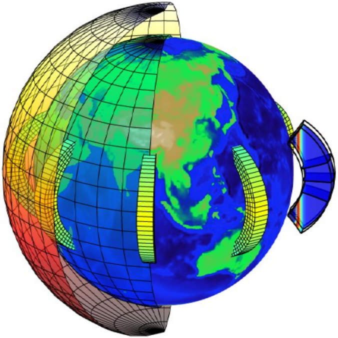
Tache 5

- Modèlisation et approximations numériques efficaces
- Inria Lille

Ionosphère terrestre

L'ionosphère est la partie supérieure de l'atmosphère, ionisée, en référence à son état de conductibilité électrique qui est caractérisé par une ionisation partielle des gaz.





Quantités en altitude

Modèle Dynamo ionosphérique

Euler-Maxwell ❶

$\downarrow$ ❷

Dynamo ❸

$\downarrow$ $\kappa \to 0$

Striation ❸

Analyse asymptotique

1. Adimensionnement
2. Passage à la limite
3. Passage aux coordonnées curvilignes

Après ❶ et ❷, nous avons

Modèle Dynamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u_i) = 0,\\
&E + u_i \times B = \kappa\left[\nu_i(u_i - u_n) - g + \frac{\nabla p}{\rho}\right],\\
&E + u_e \times B = -\kappa\left[\nu_e(u_e - u_n) + \frac{\nabla p}{\rho}\right],\\
&\nabla\cdot j = 0,\\
&\nabla\times E = 0,\\
&\kappa j = \rho(u_i - u_e),\\
&\nabla\cdot B = 0,\\
&\nabla\times B = 0.
\end{aligned}
$$

Le modèle Dynamo est valable sur toutes les couches de l'ionosphère.

Difficultés liées à l'étude du modèle Dynamo ionosphérique

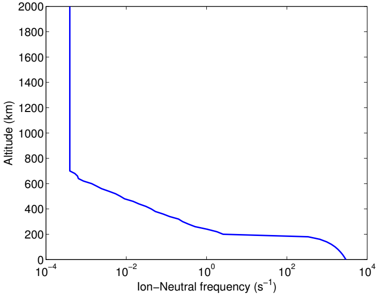
Les équations de quantité de mouvement impliquent les vitesses d'ions/électrons de la forme

$$\begin{aligned} u_i &= \mathbb{M}_i F_i = \mathbb{M}_i \left(E + \kappa\nu_i u_n + \kappa\zeta g - \kappa\eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right), \\ u_e &= \mathbb{M}_e F_e = \mathbb{M}_e \left(-E + \kappa\nu_e u_n - \kappa\eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right), \end{aligned}$$

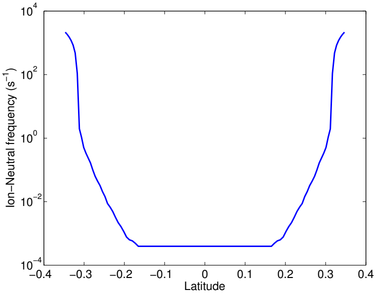
où $u_{i,e}$ sont les vitesses d'ion/électron, $\mathbb{M}_{i,e}$ sont les matrices de mobilités, $F_{i,e}$ sont les forces extérieures. $\mathbb{M}_{i,e}$ ont l'ordre

$$\mathbb{M}_{i,e} = \begin{pmatrix} O(\kappa\nu_{i,e}) & O(1) & 0 \\ O(1) & O(\kappa\nu_{i,e}) & 0 \\ 0 & 0 & O(\frac{1}{\kappa\nu_{i,e}}) \end{pmatrix}.$$

- Si $\kappa\nu_{i,e} = O(1)$: $\mathbb{M}_{i,e}$ sont les matrices isotropes
- Si $\kappa\nu_{i,e} \ll 1$: $\mathbb{M}_{i,e}$ sont les matrices anisotropes

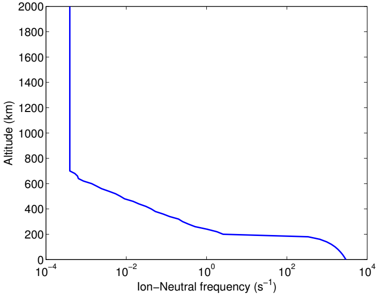


ν_i par rapport à l'altitude

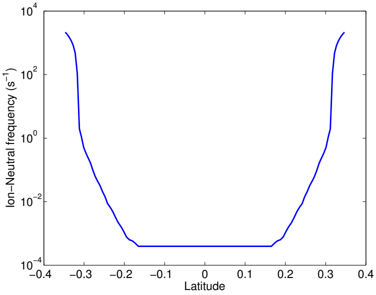


ν_i par rapport à la latitude

- Si l'altitude inférieure à 200 km, on a $\kappa\nu_{i,e} = O(1)$
- Si l'altitude superieure à 400 km, on a $\kappa\nu_{i,e} \ll 1$



ν_i par rapport à l'altitude



ν_i par rapport à la latitude

- Si l'altitude inférieure à 200 km, on a $\kappa\nu_{i,e} = O(1)$
- Si l'altitude superieure à 400 km, on a $\kappa\nu_{i,e} \ll 1$

La vitesse d'ion se décompose

$$u_i := \begin{pmatrix} u_{i,\perp} \\ u_{i,\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{i,\perp}(\nabla_\perp \phi + O(\kappa)) \\ \mathbb{M}_{i,\parallel}(\nabla_\parallel \phi + O(\kappa)) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il reste à determiner $\nabla\phi$.

On résout l'équation elliptique

$$-\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla\phi) = -\nabla \cdot J_n,$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} O(\nu_e) & O(\kappa\nu_e) & 0 \\ O(\kappa\nu_e) & O(\nu_e) & 0 \\ 0 & 0 & O(\frac{1}{\kappa^2\nu_i}) \end{pmatrix}, \quad J_n = \begin{pmatrix} O(1) \\ O(1) \\ O(\frac{1}{\kappa\nu_i}) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} O(1) \\ O(1) \\ O(\kappa) \end{pmatrix}.$$

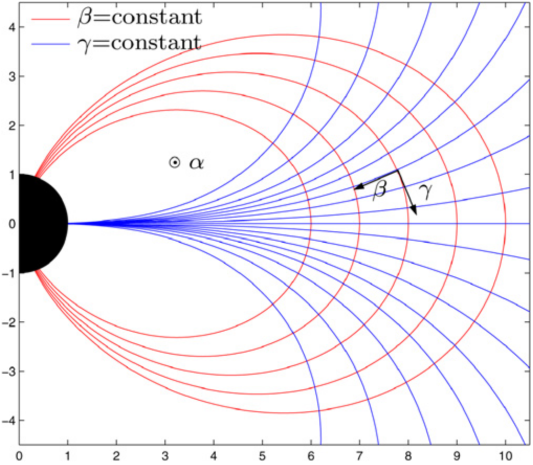
En injectant $\nabla\phi$ dans u_i, on a

$$u_i = \begin{pmatrix} O(1) \\ O(1) \\ O(\frac{1}{\nu_i}) \end{pmatrix}.$$

- La vitesse perpendiculaire $u_{i,\perp} = O(1)$
- La vitesse alignée $u_{i,\|} = O(\frac{1}{\nu_i})$, qui varie largement le long des lignes de champ magnetique.

Dans ma thèse, on suppose que toutes les forces alignées (la gravité, le gradient de la pression, etc) se compensent, *i.e.*
$\kappa\nu_i u_{n,\|} + \kappa\zeta g_\| - \kappa\eta\frac{\partial_\|(\rho T)}{\rho} = 0$
Dans ce cas, $u_{i,\|} = 0$, donc on peux observer l'évolution de plasma dans le plan perpendiculare.

Système des potentiels d'Euler



(α, β, γ) établissent un système de coordonnées curvilignes locales orthogonales associées à B, appelé *potentiels d'Euler*.

Modèle Dynamo dans nouvelles coordonnées

Dans le système des potentiels d'Euler, le modèle Dynamo s'écrit comme

Problème de couplage en 3D

$$\begin{cases} \partial_t w + \nabla \cdot (vw) - \nabla \cdot (\mathcal{M}\nabla(\rho T)) = 0, \\ -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla\phi) = -\nabla \cdot J_n, \end{cases}$$

où $w = \rho/|B|^2$, $v(\nabla\phi) = (v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)^T$,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \kappa^2 A_m & -\kappa D_m & 0 \\ \kappa D_m & \kappa^2 B_m & 0 \\ 0 & 0 & C_m \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{A}(w) = \begin{pmatrix} A & -\frac{1}{\kappa} D & 0 \\ \frac{1}{\kappa} D & B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} C \end{pmatrix}, \qquad J_n(w) = \begin{pmatrix} j_{n\alpha} \\ j_{n\beta} \\ \frac{1}{\kappa} j_{n\gamma} \end{pmatrix}.$$

Modèle Dynamo dans nouvelles coordonnées

Dans le système des potentiels d'Euler, le modèle Dynamo s'écrit comme

Problème de couplage en 3D

$$\begin{cases} \partial_t w + \nabla \cdot (vw) - \nabla \cdot (\mathcal{M}\nabla(\rho T)) = 0, \\ -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla\phi) = -\nabla \cdot J_n, \end{cases}$$

où $w = \rho/|B|^2$, $v(\nabla\phi) = (v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)^T$,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \kappa^2 A_m & -\kappa D_m & 0 \\ \kappa D_m & \kappa^2 B_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{A}(w) = \begin{pmatrix} A & -\frac{1}{\kappa}D & 0 \\ \frac{1}{\kappa}D & B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2}C \end{pmatrix}, \qquad J_n(w) = \begin{pmatrix} j_{n\alpha} \\ j_{n\beta} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un problème elliptique anisotrope

Nous considérons le problème elliptique anisotrope de la forme

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla\phi) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0, \ \text{sur } \partial\Omega_D, & \partial_z\phi = 0, \ \text{sur } \partial\Omega_z, \end{cases}$$

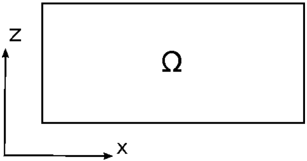
où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine de bord $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_z$ et $\mathcal{A}$ une matrice de diffusion de la forme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_\perp & 0 \\ 0 & \frac{1}{\kappa} A_z \end{pmatrix}.$$

Les termes $A_\perp$ et A_z sont du même ordre de grandeur, cependant le paramètre $0 < \kappa(z) < 1$ peut être localement très petit provoquant donc l'anisotropie du problème.

Cas où κ ne dépend pas de (x, z)

Nous commençons avec un modèle en 2D



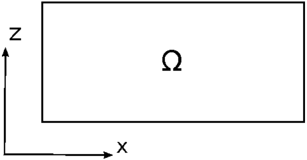
$$\begin{cases} -\partial_x \left(A_\perp \partial_x \phi_\kappa \right) - \partial_z \left(\frac{1}{\kappa} A_z \partial_z \phi_\kappa \right) = f, & \text{sur } \Omega, \\ \phi_\kappa = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x, \\ \partial_z \phi_\kappa = 0, & \text{sur } \partial\Omega_z. \end{cases} \tag{1}$$

Si $\kappa \to 0$, nous obtenons un modèle réduit

$$\begin{cases} -\partial_z \left(A_z \partial_z \phi_0 \right) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \phi_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x, \\ \partial_z \phi_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega_z. \end{cases} \tag{2}$$

Ce modèle (2) est mal-posé car toutes les fonctions ϕ_κ, ne dependant que de x et vérifiant $\phi_\kappa(x) = 0$ sur $\partial\Omega_x$, satisfont à ce modèle.

Cas où κ ne dépend pas de (x, z)

Nous commençons avec un modèle en 2D 

$$\begin{cases} -\partial_x \left(\kappa A_\perp \partial_x \phi_\kappa\right) - \partial_z \left(A_z \partial_z \phi_\kappa\right) = \kappa f, & \text{sur } \Omega, \\ \phi_\kappa = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x, \\ \partial_z \phi_\kappa = 0, & \text{sur } \partial\Omega_z. \end{cases} \tag{1}$$

Si $\kappa \to 0$, nous obtenons un modèle réduit

$$\begin{cases} -\partial_z \left(A_z \partial_z \phi_0\right) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \phi_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x, \\ \partial_z \phi_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega_z. \end{cases} \tag{2}$$

Ce modèle (2) est mal-posé car toutes les fonctions ϕ_κ, ne dependant que de x et vérifiant $\phi_\kappa(x) = 0$ sur $\partial\Omega_x$, satisfont à ce modèle.

Schéma preservant l'asymptotique (AP)

[DDN] P. DEGOND, F. DELUZET, C. NEGULESCU, *An asymptotic preserving scheme for strongly anisotropic elliptic problems* , SIAM-MMS, 2010.
[BDNY] C. BESSE, F. DELUZET, C. NEGULESCU, C. YANG, *Efficient numerical methods for strongly anisotropic elliptic equations*, soumis.

Considérons le cas $\Omega_x = [0, L_x]$, $\Omega_z = [0, L_z]$. Soit f une fonction définie dans le domaine Ω, alors sa moyenne le long de l'axe z s'écrit

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{L_z} \int_0^{L_z} f(x,z)dz,$$

la fluctuation s'exprime

$$f'(x,z) = f(x,z) - \bar{f}(x).$$

Equation de moyenne (intégration de (1) le long de l'axe z)

$$\begin{cases} -\partial_x \left(\overline{A_\perp} \partial_x \bar{\phi}_\kappa \right) = \bar{f} + \partial_x \left(\overline{A_\perp \partial_x \phi'_\kappa} \right), \text{ dans } \Omega_x, \\ \bar{\phi}_\kappa = 0, \text{ sur } \partial\Omega_x. \end{cases} \quad (3)$$

Equation de fluctuation

Formulation de [DDN] (soustraction de (1) et (3))

$$\left\{\begin{array}{l} -\kappa\partial_x\left(A_\perp\partial_x\phi'_\kappa\right)-\partial_z\left(A_z\partial_z\phi'_\kappa\right)+\kappa\partial_x\left(\overline{A'_\perp\partial_x\phi'_\kappa}\right)\\ =\kappa f'+\kappa\partial_x\left(A'_\perp\partial_x\bar{\phi}_\kappa\right),\text{dans }\Omega,\\ \phi'_\kappa=0,\text{sur }\partial\Omega_x,\\ \partial_z\phi'_\kappa=0,\text{sur }\partial\Omega_z,\\ \overline{\phi'_\kappa}=0,\text{dans }\Omega_x.\end{array}\right. \tag{4}$$

Formulation de [BDNY] (décomposition $\phi_\kappa=\bar{\phi}_\kappa+\phi'_\kappa$ dans (1))

$$\left\{\begin{array}{l} -\kappa\partial_x\left(A_\perp\partial_x\phi'_\kappa\right)-\partial_z\left(A_z\partial_z\phi'_\kappa\right)=\kappa f+\kappa\partial_x\left(A_\perp\partial_x\bar{\phi}_\kappa\right),\ \text{dans}\ \ \Omega,\\ \phi'_\kappa=0,\ \text{sur}\ \ \partial\Omega_x,\\ \partial_z\phi'_\kappa=0,\ \text{sur}\ \ \partial\Omega_z,\\ \overline{\phi'_\kappa}=0,\ \text{dans}\ \ \Omega_x.\end{array}\right. \tag{5}$$

Régime limite

En faisant tendre κ vers 0 dans l'équation de fluctuation (5), nous avons

$$\begin{cases} -\partial_z \left(A_z \partial_z \phi_0' \right) = 0, \text{dans } \Omega, \\ \phi_0' = 0, \text{sur } \partial\Omega_x, \\ \partial_z \phi_0' = 0, \text{sur } \partial\Omega_z, \\ \overline{\phi_0'} = 0, \text{dans } \Omega_x. \end{cases} \tag{6}$$

(6) possède une unique solution $\phi_0' \equiv 0$. En injectant ϕ_0' dans l'équation de moyenne (3), nous obtenons un modèle de limite (modèle Striation):

$$\begin{cases} -\partial_x \left(\overline{A_\perp} \partial_x \bar{\phi}_0 \right) = \bar{f}, & \text{dans } \Omega_x, \\ \bar{\phi}_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x. \end{cases} \tag{7}$$

$\bar{\phi}_0$ est l'unique solution du modèle réduit. Le problème anisotrope devient bien-posé indépendant de κ.

Construction d'un schéma AP basé sur le régime limite

Equation AP

$$\begin{cases} -\kappa\partial_x\left(A_\perp\partial_x\phi'_\kappa\right) - \partial_z\left(A_z\partial_z\phi'_\kappa\right) = \kappa f + \kappa\partial_x\left(A_\perp\partial_x\bar{\phi}_\kappa\right), \\ -\partial_x\left(\overline{A_\perp}\partial_x\bar{\phi}_\kappa\right) = \bar{f} + \partial_x\left(\overline{A_\perp\partial_x\phi'_\kappa}\right), \\ \text{C.L.} \\ \overline{\phi'_\kappa} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Définissons deux espaces de Hilbert

$$\mathbb{V} = \{\psi(x,z) \in H^1(\Omega);\ \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x \times \Omega_z, \},$$
$$\mathbb{W} = \{\bar{\psi}(x) \in H^1(\Omega_x);\ \bar{\psi} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_x\},$$

Prise en compte de la contrainte $\overline{\phi'_\kappa} \equiv 0$ dans Ω_x par multiplicateur de Lagrange $\bar{P}$

$$(AP)\begin{cases} a_1(\phi'_\kappa,\psi') + b_1(\bar{P},\psi') = f_1(\psi') - c_1(\bar{\phi}_\kappa,\psi'), & \forall\psi' \in \mathbb{V}, \\ a_2(\bar{\phi}_\kappa,\bar{\psi}) = f_2(\bar{\psi}) - c_2(\phi'_\kappa,\bar{\psi}), & \forall\bar{\psi} \in \mathbb{W}, \\ b_1(\phi'_\kappa,\bar{Q}) = 0, & \forall\bar{Q} \in \mathbb{W} \end{cases} \tag{9}$$

Théorème

Pour tout $\kappa > 0$, il existe un unique couple $(\bar{\phi}_\kappa, \phi'_\kappa) \in \mathbb{W} \times \mathbb{V}$ solution de la formulation faible (9). De plus, le couple $(\bar{\phi}_\kappa, \phi'_\kappa)$ converge vers $(\bar{\phi}_0, \phi'_0)$ dans $\mathbb{W} \times \mathbb{V}$ quand κ tend vers 0, où $\bar{\phi}_0$ est la solution du modèle limite Striation (7).

Nous choisissons une solution exacte

$$\phi_e(x,z) := \sin\left(\frac{2\pi}{L_x}x\right)\left(1 + \kappa\cos\left(\frac{2\pi}{L_z}z\right)\right)$$

avec les coefficients de la matrice de diffusion

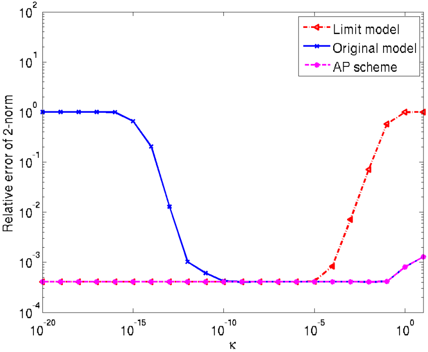
$$A_\perp(x,z) = c_1 + xz^2,\ A_z(x,z) = c_2 + xz,$$

avec c_1, c_2 constantes positives. Le second membre f est construit en injectant $\phi_e(x,z)$ dans l'équation (1).

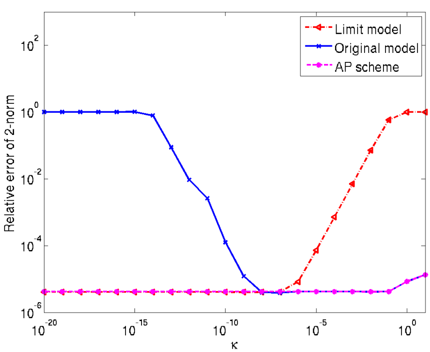
Nous discrétisons le système AP (9) avec une méthode d'éléments finis de type $\mathbb{Q}_1$. Pour comparer les résultats, nous définissons l'erreur relative

$$\|\phi_e - \phi_h\|_r = \frac{\|\phi_e - \phi_h\|_2}{\|\phi_e\|_2}.$$

Résultats numériques: erreur relative



Maillage 50 $\times$ 50



Maillage 500 $\times$ 500

Figure: Erreur relative entre la solution exacte et les solutions approchées.

Résultats numériques: conditionnement

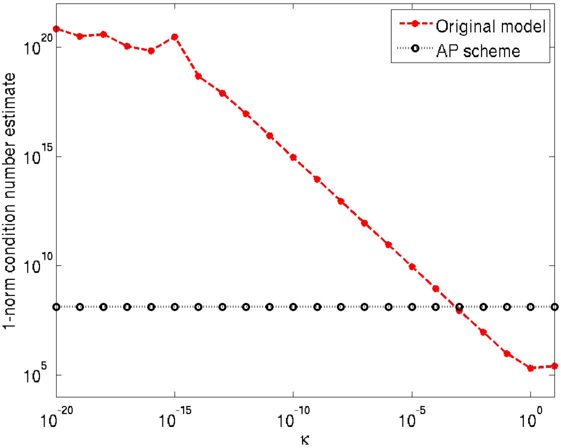


Figure: Estimation du conditionnement. Maillage 250 $\times$ 250.

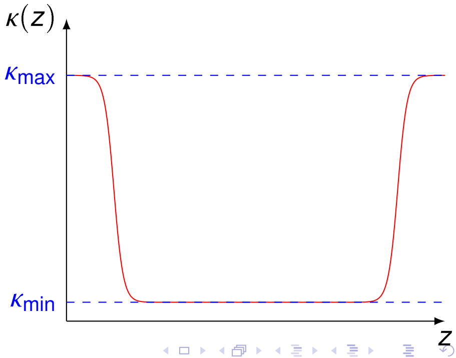
Cas κ variable

Nous considérons maintenant $\kappa = \kappa(z)$, alors le problème elliptique anisotrope s'écrit

$$\begin{cases} -\partial_x \left(A_\perp \partial_x \phi \right) - \partial_z \left(\frac{A_z}{\kappa} \partial_z \phi \right) = f, \text{ sur } \Omega, \\ \phi = 0, \text{sur } \partial\Omega_x, \partial_z \phi = 0, \text{sur } \partial\Omega_z. \end{cases} \tag{10}$$

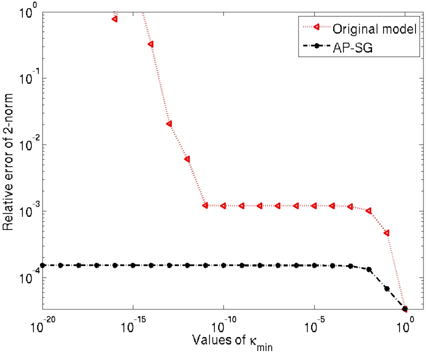
Nous pouvons appliquer à nouveau le schéma AP pour résoudre (10).

Pour vérifier l'efficacité du schéma AP dans le cas κ variable, nous choisissons une fonction $0 < \kappa(z) \leqslant 1$ contrôlée par κ_{max} et κ_{min}.

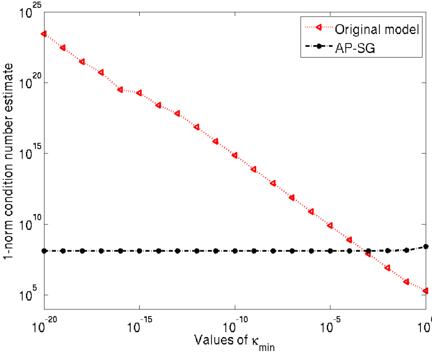


Cas κ variable

Nous fixons $\kappa_{\max} = 1$ et faisons varier $\kappa_{\min}$ entre 1 et 10^{-20}. Comme, le gradient de la fonction $\kappa(z)$ est très grand, nous combinons un schéma de Scharfetter-Gummel avec le schéma AP.



Erreurs relatives



Estimations du conditionnement

Propriétés des matrices de discrétisation

A	EF Standard	[DDN]	[BDNY]
Creuse	✔	✘	✔
Définie positive	✔	✘	✘
Indépendante de κ	✘	✔	✔

- Schéma AP robuste en résolvant par des méthodes itératives (GMRES, BiCG), ou des méthodes directes (PARDISO, MUMPS)...

Problème de couplage en 3D

Nous considérons maintenant un modèle Dynamo sans le gradient de pression en supposant que toutes les forces extérieures alignées se compensent. Alors nous obtenons le modèle 3D suivant

$$\begin{cases} \partial_t w + \nabla \cdot (vw) = 0, & \text{(i)} \\ -\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \phi) = -\nabla \cdot J_n, & \text{(ii)} \end{cases}$$

où $w = \rho / |B|^2$, $v(\nabla \phi) = (v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)^T$,

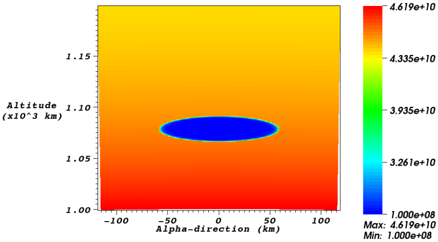
$$\mathcal{A}(w) = \begin{pmatrix} A & -\frac{1}{\kappa} D & 0 \\ \frac{1}{\kappa} D & B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} C \end{pmatrix}, \qquad J_n(w) = \begin{pmatrix} j_{n\alpha} \\ j_{n\beta} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

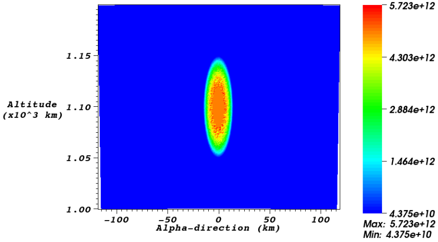
Nous discrétisons (i) par une méthode de volumes finis classique. Nous reformulons (ii) par le schéma AP et la discrétisons par une méthode d'éléments finis de type $\mathbb{Q}_1$ standard.

Donnée initiale

Premier cas test :
Nuage de plasma de sous-densité perturbé par la gravité

Deuxième cas test :
Nuage de plasma de sur-densité perturbé par le vent neutre

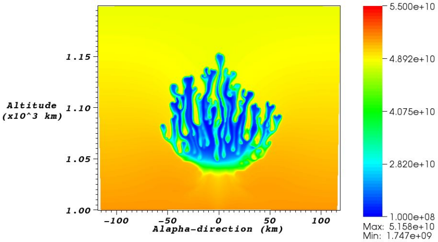




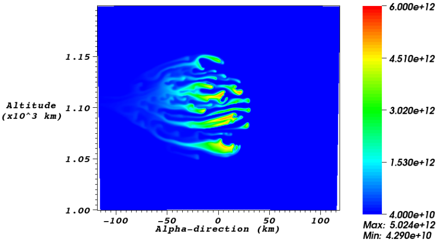
Simulation du modèle limte (Striation)

En supposant que la fréquence de collision est homogène, nous faisons les simulations suivantes:

Nuage de plasma de sous-densité



Nuage de plasma de sur-densité

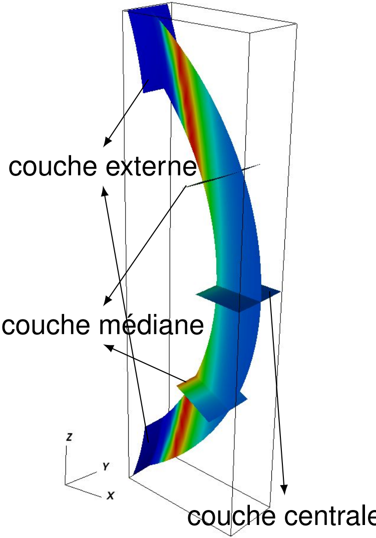


Simulation du modèle Dynamo

Estimation du conditionnement

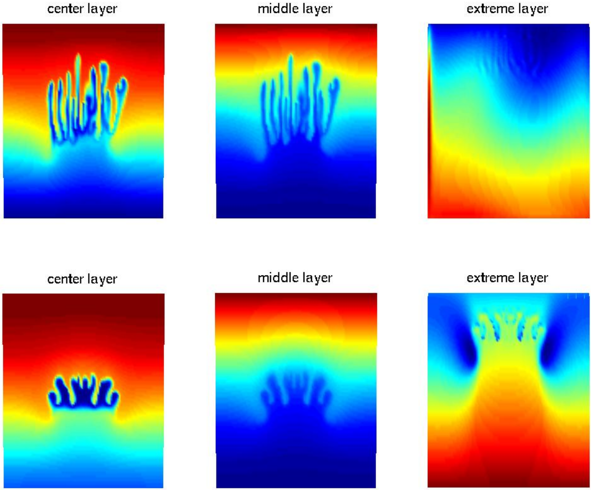
		Schéma AP	EF Standard
20^3	tube 1	9.0706e+08	3.3652e+07
	tube 2	9.3537e+08	7.4774e+13
30^3	tube 1	1.4139e+10	7.6574e+07
	tube 2	1.3606e+10	3.9113e+12

- Tube 1: altitude entre 100 km et 350 km
- Tube 2: altitude entre 100 km et 850 km



Simulation du modèle Dynamo

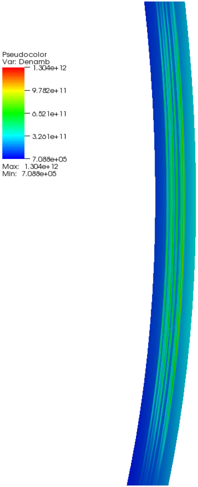
Nuage de plasma de sous-densité



Simulation du Modèle Dynamo

Nuage de plasma de sur-densité

Scintillation



Simulation numérique

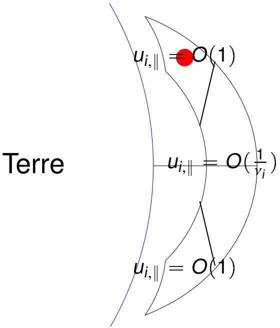
Retourner au problème original

On considère maintenant l'influence des forces extérieures alignées.
Il y a deux possibilités pour lesquelles nos simulations ne donnent pas résultats raisonables:

- Le modèle Dynamo actuel n'est pas correct
- La donnée initiale n'est pas correcte

On suppose que le problème vient de 2ème point, et puis on considère un cas idéal

- une bulle de sur-densité se trouve à l'ionosphère basse
- la vitesse est $O(1)$ aux extremes et $O(\frac{1}{\nu_i})$ au centre
- la perturebation propage le long des lignes de champ magnetique



Malheureusement, avec la donnée du modèle IRI, $u_{i,\parallel}$ varie beaucoup à l'ionospère basse.
Je propose qu'on utilise une donnée plus idéale pour tester le modèle Dynamo, *i.e.*

- le champ magnetique est uniforme
- les autres données (ρ, ν ...) ne dépendent que γ
- $\kappa\nu$ est $O(1)$ aux extremes

Vous avez autres propositions?