

# RÉUNION ANR IODISSEE

**Sebastian Minjeaud**

Christophe Besse et Pauline Lafitte

Project-Team SIMPAF, INRIA Lille-Nord Europe.

Ecole Centrale Paris, le 11 janvier 2013

▶ Obtenir une **description “probable”** de la configuration de l’ionosphère à un instant donné

↪ **représentations de la densité électronique**

◆ structures “grande échelle” : modèles STRIATION ou DYNAMO.

◆ tenir compte des fluctuations à plus petites échelles dues à la turbulence

▶ Construire un **module de propagation d’onde** dans le milieu obtenu à la première étape

◆ Approximation de l’optique géométrique

◆ Approximation de Rytov

▶ Informations statistiques sur les **modifications de l’amplitude et de la phase des signaux** se propageant à travers l’ionosphère.

## ① DESCRIPTION DE LA TURBULENCE À PARTIR D'UN SPECTRE

## ② PROPAGATION D'ONDES

- Equations générales
- Approximation de l'optique géométrique
- Approximation de Rytov

## phénoménologie de Richardson

transfert d'énergie en cascade des grandes échelles vers les petites échelles

► **Grande échelle :**

Richardson, 1922

**injection de l'énergie** nécessaire au développement de la turbulence

↪ peu importe le mécanisme, son influence est perdue dans la cascade.

► **Petite échelle :**

**dissipation de l'énergie** (viscosité...)

► **Zone inertielle (gamme d'échelles intermédiaires) :**

**redistribution de l'énergie** à des structures de tailles plus petites.

↪ turbulence homogène et isotrope (perte d'information statistique concernant le mécanisme d'injection)

↪ Loi universelle de Kolmogorov :

$$E(\kappa) \sim \kappa^{-5/3}$$

où  $E(k)$  est le spectre de turbulence en module du nombre d'onde.

Kolmogorov, 1941

Certaines lacunes corrigées par (K62) (intermittence...)

- ▶ Corrélation double en vitesse

$$Q_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}) = \langle \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \equiv Q_{ij}(r)$$

- ▶ Spectre tridimensionnel en vecteur d'onde

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) \equiv \Phi_{ij}(\kappa) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} Q_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

- ▶ Lien avec l'énergie cinétique :

$$\left\langle \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right\rangle = 2\pi \int_0^\infty \kappa^2 \sum_{i=1}^3 \Phi_{ii}(\kappa) d\kappa$$

preuve :  $\diamond \langle \mathbf{u}^2 \rangle = \sum_{i=1}^3 Q_{ii}(0)$

$$\begin{aligned} \diamond Q_{ij}(r) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\kappa}} d\boldsymbol{\kappa} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty \Phi_{ij}(\kappa) \int_0^\pi \left[ e^{i r \kappa \cos \phi} \kappa^2 \sin \phi d\phi \right] d\kappa \\ &= 4\pi \int_0^\infty \Phi_{ij}(\kappa) \kappa^2 \frac{\sin(r\kappa)}{r\kappa} d\kappa \end{aligned}$$

- ▶ Spectre monodimensionnel :  $E(\kappa) = 2\pi \kappa^2 \sum_{i=1}^3 \Phi_{ii}(\kappa)$

## Pas de théorie universelle bien établie....

Identification expérimentale avec un certain succès du spectre en densité électronique :

$$\Phi_n(\kappa) \sim \kappa^{-\nu}$$

Booker, 1979

valable pour la gamme d'échelle entre  $l_0$  et  $L_0$ .

► **Indice spectral  $\nu$  :**

$$3 < \nu < 4$$

► **Grande échelle de turbulence  $L_0$  :**

“The effective outer scale emerges as a somewhat arbitrary division between the well-developed structures that can be modeled by a statistically random process and the evolving structures that depend on the initial configuration of the plasma at the time of instability onset.”

Rino, 79

$$5\text{km} < L_0 < 20\text{km}$$

► **Petite échelle de turbulence  $l_0$  :**

$$2\text{m} < l_0 < 5\text{m}$$

Soit  $h$  est une fonction déterministe réelle paire.

$$\text{Si } n(\mathbf{x}) = n^0 * h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} n^0(\mathbf{y})h(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y}$$

$$\text{alors } \Phi_n(\boldsymbol{\kappa}) = \Phi_{n^0}(\boldsymbol{\kappa})|\mathcal{F}(h)(\boldsymbol{\kappa})|^2$$

preuve :

$$\begin{aligned} Q_n(\mathbf{r}) &= \langle n(\mathbf{0})n(\mathbf{r}) \rangle = \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} n^0(\mathbf{y})n^0(\mathbf{z})h(-\mathbf{y})h(\mathbf{r} - \mathbf{z})d\mathbf{y}d\mathbf{z} \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} Q_{n^0}(\mathbf{z} - \mathbf{y})h(\mathbf{y})h(\mathbf{r} - \mathbf{z})d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} Q_{n^0}(\theta)h(\mathbf{z} - \theta)h(\mathbf{r} - \mathbf{z})d\theta d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} Q_{n^0}(\theta) \int_{\mathbb{R}^3} h(\mathbf{z})h(\mathbf{r} - \theta - \mathbf{z})d\mathbf{z}d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} Q_{n^0}(\theta)h * h(\mathbf{r} - \theta)d\theta \\ &= Q_{n^0} * h * h(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Objectif : Générer  $n$  connaissant  $\Phi_n$ .

$$n = n^0 * h = \mathcal{F}^{-1} (\mathcal{F}(n^0)\mathcal{F}(h)).$$

Stam, Fiume, 1993

▶ Maillage cartésien  $N_x \times N_y \times N_z$ .

▶ On génère directement  $\mathcal{F}(n^0)$

◆ On choisit pour  $n^0$  un bruit blanc, *i.e.*  $\Phi_{n^0} = \text{cste}$ .

◆  $\mathcal{F}(n^0) \leftrightarrow W_{ijk} = (\alpha_{ijk} + \mathbf{i}\beta_{ijk}) \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\alpha_{ijk}$  et  $\beta_{ijk}$  indépendante et suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$   
(en fait il faut respecter certaines symétries...)

▶ On calcule  $\mathcal{F}(h)$  en utilisant la formule de filtrage :

$$\Phi_n(\boldsymbol{\kappa}) = |\mathcal{F}(h)(\boldsymbol{\kappa})|^2 \leftrightarrow H_{ijk} = \Phi_n(\kappa_i, \kappa_j, \kappa_k)^{\frac{1}{2}}.$$

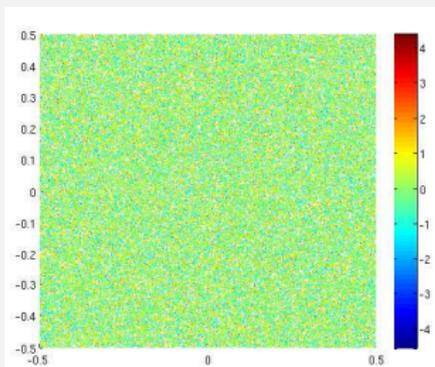
▶ On en déduit la transformée de fourier de  $n$  :

$$\mathcal{F}(n) = (\mathcal{F}(n^0)\mathcal{F}(h)) \leftrightarrow (\mathcal{F}R)_{ijk} = W_{ijk}H_{ijk}.$$

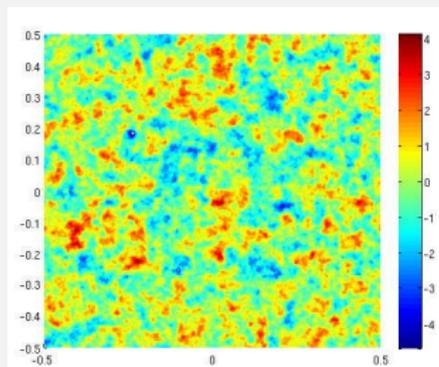
▶ On inverse la transformée de fourier :

$$R = \frac{N_x N_y N_z}{|H|} \text{IFFT} [\mathcal{F}R].$$

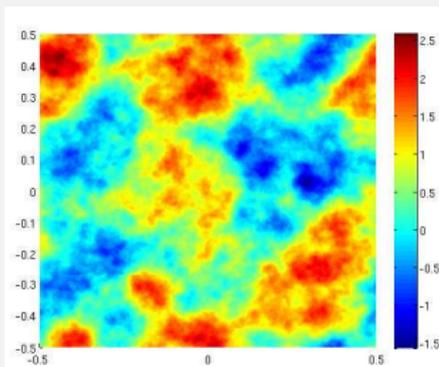
$$\Phi_n(\boldsymbol{\kappa}) = \left(1 + (L_0\boldsymbol{\kappa})^2\right)^{-\frac{11}{6}}$$



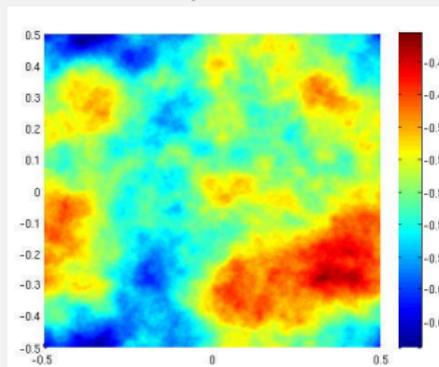
Pas de corrélation



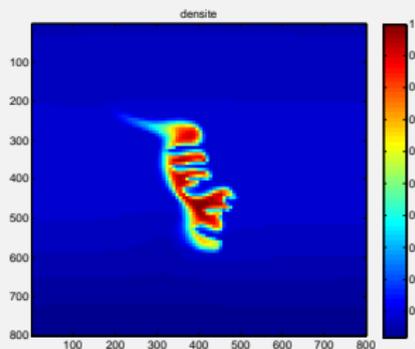
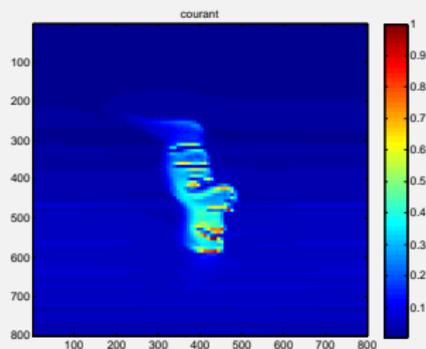
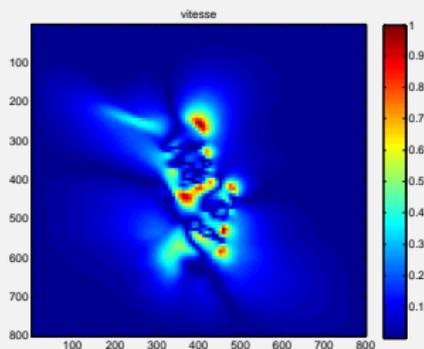
$L_0 = 0.1$



$L_0 = 1$

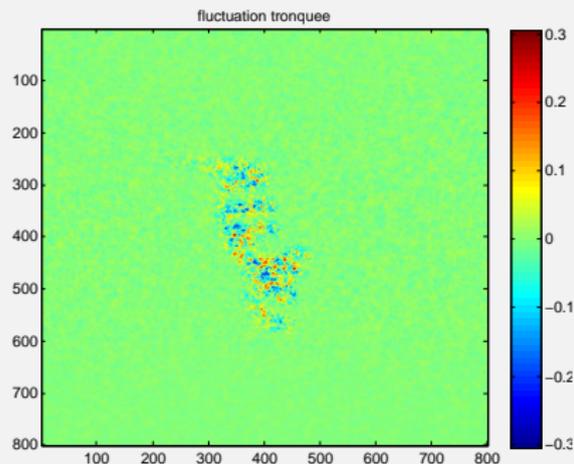
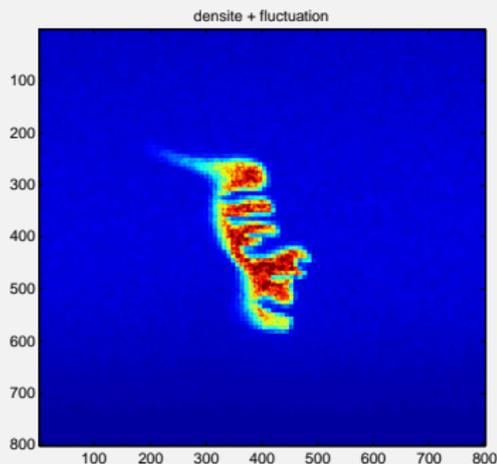


$L_0 = 10$

Instabilités de grande échelle  $\rightsquigarrow$  modèle STRIATIONDensité  $n$ Norme du vecteur courant  $|j|$ Norme du vecteur vitesse  $|\mathbf{u}|$

Superposition de fluctuations générées aléatoirement

$$n(1 + 0.1n_f)$$



- ▶ Code matlab 2D opérationnel.
- ▶ Simulations 3D (le principe est exactement le même).
- ▶ Prise en compte des valeurs “physiques” des paramètres
- ▶ Prise en compte de l’anisotropie dans le spectre donnant les fluctuations :
  - ◆ étirements des perturbations le long des lignes de champs.
  - ◆ Modèle de Booker :

$$\Phi_n(\boldsymbol{\kappa}) \sim \frac{\kappa^{-\nu}}{[1 + (\mathcal{A}^2 - 1) \cos^2 \psi]^{\frac{\nu}{2}}}$$

où  $2 < \mathcal{A} < 25$  est un coefficient d’anisotropie,  
et  $(\kappa, \psi, \omega)$  sont les coordonnées sphériques.

## ① DESCRIPTION DE LA TURBULENCE À PARTIR D'UN SPECTRE

## ② PROPAGATION D'ONDES

- Equations générales
- Approximation de l'optique géométrique
- Approximation de Rytov

## ① DESCRIPTION DE LA TURBULENCE À PARTIR D'UN SPECTRE

## ② PROPAGATION D'ONDES

- Equations générales
- Approximation de l'optique géométrique
- Approximation de Rytov

► Equations de Maxwell :

$$(1) \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B},$$

$$(2) \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{D} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J},$$

$$(3) \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \varrho,$$

$$(4) \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

► Equation de continuité (div (2) et (3)) :

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0.$$

- ◆ lien entre le courant  $\mathbf{J}$  et la densité de charge  $\varrho$ .
- ◆  $\varrho$  non nul dans l'antenne mais négligeable partout ailleurs.

► Lois constitutives :

$$\mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H},$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}.$$

- ◆  $\mu_m = 1 \implies \mathbf{B} = \mathbf{H}$
- ◆  $\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0(\mathbf{r}) + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t).$

► Combinaison de (1), (2) et des deux lois constitutives :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) &\stackrel{(1)}{=} -\frac{1}{c} \partial_t(\operatorname{rot} \mathbf{B}) \\ &= -\frac{1}{c} \partial_t(\operatorname{rot} \mathbf{H}) \stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{c} \partial_t \left( \frac{\partial_t \mathbf{D} + 4\pi \mathbf{J}}{c} \right) \\ &= -\frac{1}{c^2} \partial_{tt}(\varepsilon \mathbf{E}) - \frac{4\pi}{c^2} \partial_t \mathbf{J}. \end{aligned}$$

► Loin de l'antenne,

$$\left. \begin{array}{l} \diamond (3) \implies \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \\ \diamond \operatorname{div} \mathbf{D} = \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon \end{array} \right\} \implies \operatorname{div} \mathbf{E} = -\nabla(\log \varepsilon) \cdot \mathbf{E}.$$

► Ainsi, puisque  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$ , on obtient,

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}(\varepsilon \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c^2} \partial_t \mathbf{J} - \nabla[\nabla(\log \varepsilon) \cdot \mathbf{E}].$$

Le dernier terme est en fait négligeable et il vient :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}(\varepsilon \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c^2} \partial_t \mathbf{J}.$$

► Considérons que  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{E}$  sont de la forme :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}.$$

Il vient alors :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \mathbf{E} e^{i\omega t} \partial_{tt} [\varepsilon e^{-i\omega t}] = -\frac{4i\pi\omega}{c^2} \mathbf{J}(\mathbf{r}).$$

or, nous avons

$$\frac{1}{c^2} e^{i\omega t} \partial_{tt} [\varepsilon e^{-i\omega t}] = \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varepsilon - 2i \frac{\omega}{c^2} \partial_t \varepsilon - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon$$

Les deux premiers termes sont négligeables.

► En introduisant  $\kappa = \frac{\omega}{c}$ , il vient finalement :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \kappa^2 \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} i\kappa \mathbf{J}(\mathbf{r}).$$

► Si  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = J(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x$ , seule la composante selon  $\mathbf{e}_x$  de  $\mathbf{E}$  sera excitée. L'équation est alors scalaire :

$$\Delta E(\mathbf{r}) + \kappa^2 \varepsilon E(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} i\kappa J(\mathbf{r}).$$

## ① DESCRIPTION DE LA TURBULENCE À PARTIR D'UN SPECTRE

## ② PROPAGATION D'ONDES

- Equations générales
- **Approximation de l'optique géométrique**
- Approximation de Rytov

- Loin de l'antenne :

$$\Delta E(\mathbf{r}) + \kappa^2 \varepsilon E(\mathbf{r}) = 0.$$

- Nous postulons que le champs électrique est de la forme :

$$E(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i\kappa\Psi(\mathbf{r})}$$

où  $A$  et  $\Psi$  (eikonale) sont des fonctions réelles.

- Nous développons la fonction  $A$  en puissance inverse du nombre d'onde  $\kappa$  :

$$A(\mathbf{r}) = A_1(\mathbf{r}) + \frac{A_2(\mathbf{r})}{i\kappa} + \frac{A_3(\mathbf{r})}{(i\kappa)^2} + \dots$$

Nous classons les termes suivant les puissances de  $\kappa$  :

$$\begin{aligned} \Delta E + \kappa^2 \varepsilon E = e^{i\kappa\Psi} & \left[ \kappa^2 A_1 \left[ \varepsilon - |\nabla\Psi|^2 \right] \right. \\ & + i\kappa \left[ 2\nabla\Psi \cdot \nabla A_1 + A_1 \Delta\Psi - A_2 \left[ \varepsilon - |\nabla\Psi|^2 \right] \right] \\ & + \left[ \Delta A_1 + 2\nabla\Psi \cdot \nabla A_2 + A_2 \Delta\Psi - A_3 \left[ \varepsilon - |\nabla\Psi|^2 \right] \right] \\ & \left. + \frac{1}{i\kappa} \dots \right] \end{aligned}$$

► En ne retenant que les **deux premiers termes**, il vient :

$$◆ |\nabla\Psi|^2 = \varepsilon,$$

$$◆ 2\nabla\Psi \cdot \nabla A_1 + A_1\Delta\Psi = 0.$$

► La propagation de l'énergie se fait selon la direction  $\nabla\Psi$ .

↪ rayon = trajectoire orthogonale aux surfaces  $\Psi = \text{cste}$ .

► On peut montrer que la “bonne” solution est :

$$\nabla\Psi = \mathbf{t}\sqrt{\varepsilon}$$

où ◆  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent au rayon :  $\mathbf{t} = \frac{d}{ds}(\mathbf{r}(s))$ ,

◆  $s$  désignant l'abscisse curviligne le long du rayon.

► Nous avons donc

$$\nabla\Psi = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\sqrt{\varepsilon}.$$

► Nous dérivons l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \sqrt{\varepsilon} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) &= \frac{d}{ds} (\nabla \Psi), \\ &= \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \right) (\nabla \Psi), \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\nabla \Psi \cdot \nabla) (\nabla \Psi). \end{aligned}$$

► Or nous avons,

$$\left[ (\nabla \Psi \cdot \nabla) (\nabla \Psi) \right]_i = \frac{1}{2} \partial_i (|\nabla \Psi|^2) = \frac{1}{2} \partial_i \varepsilon$$

► Nous obtenons finalement :

$$\frac{d}{ds} \left( \sqrt{\varepsilon} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \nabla \varepsilon.$$

ou encore

$$\frac{d}{ds} \left( \sqrt{\varepsilon} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla (\sqrt{\varepsilon}).$$

FONCTION EIKONALE  $\Psi$ 

► Nous dérivons  $\Psi$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\Psi(\mathbf{r})) &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \Psi(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |\nabla \Psi|^2 \\ &= \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

AMPLITUDE  $A_1$ 

► L'amplitude  $A_1$  vérifie :

$$2\nabla \Psi \cdot \nabla A_1 + A_1 \Delta \Psi = 0.$$

► Or nous avons :

$$\begin{aligned} 2\nabla \Psi \cdot \nabla A_1 &= 2\sqrt{\varepsilon} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla A_1 \\ &= 2\sqrt{\varepsilon} \frac{d}{ds} (A_1(\mathbf{r})). \end{aligned}$$

► L'amplitude  $A_1$  vérifie donc l'équation :

$$A_1 \Delta \Psi = -2\sqrt{\varepsilon} \frac{d}{ds} (A_1(\mathbf{r}))$$

$$A_1 \Delta \Psi = -2\sqrt{\varepsilon} \frac{d}{ds} (A_1(\mathbf{r}))$$

► En intégrant cette équation, nous trouvons :

$$A_1(\mathbf{r}(s)) = A_1(\mathbf{r}(0)) \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^s \frac{\Delta \Psi(\mathbf{r}(w))}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}(w), t)}} dw \right)$$

► Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{r}(s)) &= A_1(\mathbf{r}(0)) \exp \left( -\frac{1}{2} \log \left( \frac{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}(s), t)}}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}(0), t)}} \right) \right) \\ &= A_1(\mathbf{r}(0)) \frac{\varepsilon(\mathbf{r}(0), t)^{\frac{1}{4}}}{\varepsilon(\mathbf{r}(s), t)^{\frac{1}{4}}}. \end{aligned}$$

## PROPRIÉTÉS DU MILIEU

- L'indice de réfraction dépend de la densité électronique  $n$  :

$$N(\mathbf{x}) = \sqrt{\varepsilon} = \left( 1 - \frac{e^2}{4\pi^2 m_e \epsilon_0} \frac{n(\mathbf{x})}{f^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

avec  $e$  la charge élémentaire,  $m_e$  la masse d'un électron,  $\epsilon_0$  la permittivité du vide,  $f$  la fréquence du signal.

## EDO SATISFAITES PAR LES CARACTÉRISTIQUES DU SIGNAL

Wheelon, 2001

- Trajectoire  $\mathbf{r}$  :

$$\frac{d}{ds} \left[ N(\mathbf{r}(\cdot)) \frac{d}{ds} (\mathbf{r}(\cdot)) \right] (s) = \nabla N(\mathbf{r}(s)).$$

- Phase  $\Psi$  :

$$\frac{d}{ds} [\Psi(\mathbf{r}(\cdot))] (s) = N(\mathbf{r}(s)).$$

- Amplitude  $A$  :

$$A(\mathbf{r}(s)) = A_0 \left[ \frac{N(\mathbf{r}(s))}{N(\mathbf{r}(0))} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

## ① DESCRIPTION DE LA TURBULENCE À PARTIR D'UN SPECTRE

## ② PROPAGATION D'ONDES

- Equations générales
- Approximation de l'optique géométrique
- Approximation de Rytov

- Revenons à l'équation du Helmholtz (loin du transmetteur) :

$$\Delta E(\mathbf{r}) + \kappa^2 \varepsilon E(\mathbf{r}) = 0.$$

- Hypothèses :

- ◆  $\varepsilon(\mathbf{r}, t) = 1 + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)$
- ◆  $E_0(\mathbf{r}) = \exp(\Psi_0(\mathbf{r}))$  : champ si  $\delta\varepsilon \equiv 0$  (onde plane par ex.)
- ◆  $E(\mathbf{r}) = \exp(\Psi_0(\mathbf{r}) + \Psi(\mathbf{r}))$  :  $\exp(\Psi(\mathbf{r}))$  représente la partie à calculer où les fonctions  $\Psi_0$  et  $\Psi$  sont à valeurs complexes.

- Remplaçons dans l'équation de Helmholtz :

$$\left[ \Delta(\Psi_0 + \Psi) + |\nabla(\Psi_0 + \Psi)|^2 \right] E(\mathbf{r}) + \kappa^2 \varepsilon E(\mathbf{r}) = 0.$$

ou encore

$$\left[ \underbrace{\Delta E_0(\mathbf{r}) + \kappa^2 E_0(\mathbf{r})}_{=0} \right] \exp(-\Psi_0) + \Delta\Psi + |\nabla\Psi|^2 + 2\nabla\Psi_0 \cdot \nabla\Psi + \kappa^2 \delta\varepsilon = 0.$$

- Il vient :

$$\Delta\Psi + |\nabla\Psi|^2 + 2\nabla\Psi_0 \cdot \nabla\Psi + \kappa^2 \delta\varepsilon = 0.$$

$$\Delta\Psi + |\nabla\Psi|^2 + 2\nabla\Psi_0 \cdot \nabla\Psi + \kappa^2\delta\varepsilon = 0.$$

- Développement de  $\Psi$  par rapport au puissance de  $\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_1(\mathbf{r}) + \Psi_2(\mathbf{r}) + \Psi_3(\mathbf{r}) + \dots$$

où  $\Psi_1(\mathbf{r})$  est proportionnel à  $\delta\varepsilon$ ;  $\Psi_2(\mathbf{r})$  à  $\delta\varepsilon^2$ ; ...

- Regroupement des termes en fonction des puissances de  $\delta\varepsilon$  :

$$\Delta\Psi_1 + 2\nabla\Psi_0 \cdot \nabla\Psi_1 + \kappa^2\delta\varepsilon = 0,$$

$$\Delta\Psi_2 + |\nabla\Psi_1|^2 + 2\nabla\Psi_0 \cdot \nabla\Psi_2 = 0,$$

$$\Delta\Psi_3 + 2\nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Psi_2 + 2\nabla\Psi_0 \cdot \nabla\Psi_3 = 0,$$

...

$$\Delta\Psi_n + \sum_{p=1}^{n-1} \nabla\Psi_p \cdot \nabla\Psi_{n-p} + 2\nabla\Psi_0 \cdot \nabla\Psi_n = 0$$

- On ne conserve que les premières égalités, nous obtenons :

$$\Delta\Psi_0 + |\nabla\Psi_0|^2 + \kappa^2 = 0,$$

$$\Delta\Psi_1 + 2\nabla\Psi_0 \cdot \nabla\Psi_1 + \kappa^2\delta\varepsilon = 0,$$

- Changement d'inconnue :  $Q(\mathbf{r}) = \Psi_1(\mathbf{r})e^{\Psi_0(\mathbf{r})}$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \left[ \Delta \Psi_1 + 2\nabla \Psi_0 \cdot \nabla \Psi_1 + \Psi_1 \Delta \Psi_0 + \Psi_1 |\nabla \Psi_0|^2 \right] e^{\Psi_0} \\ &= -\kappa^2 \delta \varepsilon e^{\Psi_0} - \kappa^2 Q.\end{aligned}$$

- Equation de Helmholtz pour  $Q$  :

$$\Delta Q + \kappa^2 Q = -\kappa^2 \delta \varepsilon e^{\Psi_0}.$$

- Expression exacte de  $Q$  :

$$Q(\mathbf{r}) = -\kappa^2 \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \delta \varepsilon(\mathbf{s}, t) e^{\Psi_0(\mathbf{s})} d\mathbf{s}.$$

où  $G(\mathbf{s} - \mathbf{r}) = \frac{e^{i\kappa|\mathbf{s}-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{s} - \mathbf{r}|}$  (fonction de Green).

- Expression exacte de  $\Psi_1$  :

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = -\kappa^2 \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \delta \varepsilon(\mathbf{s}, t) \frac{E_0(\mathbf{s})}{E_0(\mathbf{r})} d\mathbf{s}.$$

## APPROXIMATION DE RYTOV

- ▶ Dans l'approximation de Rytov, le champ  $E$  est donc approché par :

$$E_1(\mathbf{r}) = e^{\Psi_0(\mathbf{r}) + \Psi_1(\mathbf{r})} = E_0(\mathbf{r}) \exp \left( -\kappa^2 \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \delta\varepsilon(\mathbf{s}, t) \frac{E_0(\mathbf{s})}{E_0(\mathbf{r})} d\mathbf{s} \right).$$

## CALCUL DES FLUCTUATIONS DE PHASE ET DE L'AMPLITUDE

- ▶ Notons  $\Phi_0$  la phase du champ  $E_0$  :  $E_0 = |E_0|e^{i\Phi_0}$ .
- ▶ Nous avons alors :  $E_1(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i(\Phi_0 + \phi(\mathbf{r}))}$  avec

$$\phi(\mathbf{r}) = -\kappa^2 \int_{\mathbb{R}^3} \delta\varepsilon(\mathbf{s}, t) \operatorname{Re} \left[ G(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \frac{E_0(\mathbf{s})}{E_0(\mathbf{r})} \right] d\mathbf{s}$$

$$A(\mathbf{r}) = |E_0(\mathbf{r})| \exp \left( -\kappa^2 \int_{\mathbb{R}^3} \delta\varepsilon(\mathbf{s}, t) \operatorname{Im} \left[ G(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \frac{E_0(\mathbf{s})}{E_0(\mathbf{r})} \right] d\mathbf{s} \right)$$

- ▶ Amplitude logarithmique  $\chi$  est donnée par la formule :

$$\chi(\mathbf{r}) = \log \left( \frac{A(\mathbf{r})}{|E_0(\mathbf{r})|} \right) = -\kappa^2 \int_{\mathbb{R}^3} \delta\varepsilon(\mathbf{s}, t) \operatorname{Im} \left[ G(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \frac{E_0(\mathbf{s})}{E_0(\mathbf{r})} \right] d\mathbf{s}$$

## APPROXIMATION DE RYTOV

► Fluctuations de phase  $\phi = \text{Re} \left( -\kappa^2 \int_{\mathbb{R}^3} \delta\varepsilon(\mathbf{s}, t) G(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \frac{E_0(\mathbf{s})}{E_0(\mathbf{r})} d\mathbf{s} \right)$

► Amplitude logarithmique  $\chi = \text{Im} \left( -\kappa^2 \int_{\mathbb{R}^3} \delta\varepsilon(\mathbf{s}, t) G(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \frac{E_0(\mathbf{s})}{E_0(\mathbf{r})} d\mathbf{s} \right)$

avec ♦  $G(\mathbf{s} - \mathbf{r}) = \frac{e^{i\kappa|\mathbf{s}-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{s} - \mathbf{r}|}$

♦  $E_0$  le champ électrique que l'on aurait obtenu dans le vide

► Le domaine d'intégration est limité à la zone où  $\delta\varepsilon \neq 0$   
 $\rightsquigarrow$  domaine de calcul dans notre cas.

## CALCUL DE $S_4$ ET $\sigma_\phi$

► Calcul de  $S_4$  :

$$S_4 = \left\langle \left( \frac{|E|^2}{|E_0|^2} \right)^2 - 1 \right\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle e^{4\chi} - 1 \rangle^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{\langle 4\chi \rangle}$$

► Calcul de  $\sigma_\phi$

$$\sigma_\phi = \langle \phi^2 \rangle$$

## APPROXIMATION DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

- ▶ Développement asymptotique en fonction de l'inverse du nombre d'onde.
- ▶ Longueur d'onde du signal petite devant les autres dimensions du pb.
- ▶ Ne tient pas compte de la diffraction.

## APPROXIMATION DE RYTOV

- ▶ Développement asymptotique en fonction de la perturbation  $\delta\varepsilon$ .
- ▶ Tient compte de la diffraction.
- ▶ Code de calcul opérationnel (en C++),  
Couplage possible avec une version de DYNAMO-AP (en C++).